

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JÉDERSON DA SILVA

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA UTILIZANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS h-ADAPTATIVO FUNDAMENTADO NA RECUPERAÇÃO
DA DENSIDADE DO ERRO ISOTRÓPICA E ANISOTRÓPICA**

CURITIBA

2017

JÉDERSON DA SILVA

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA UTILIZANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS h-ADAPTATIVO FUNDAMENTADO NA RECUPERAÇÃO
DA DENSIDADE DO ERRO ISOTRÓPICA E ANISOTRÓPICA**

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica, área de concentração em Mecânica dos Sólidos e Vibrações, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri.
Coorientador: Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira.

CURITIBA

2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

SI586o

Silva, Jéderson da

Otimização estrutural topológica utilizando o método dos elementos finitos h-adaptativo fundamentado na recuperação da densidade do erro isotrópica e anisotrópica / Jéderson da Silva. – Curitiba, 2017.
199 f. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2017.

Orientador: Carlos Alberto Bavastri.

Coorientador: Jucélio Tomás Pereira.

1. Otimização topológica. 2. h-adaptatividade. 3. Método dos elementos finitos. 4. Estimadores de erro a posteriori. 5. Recuperação da densidade do erro. I. Universidade Federal do Paraná.
II. Bavastri, Carlos Alberto. III. Pereira, Jucélio Tomás. IV. Título.

CDD: 620.105

Bibliotecária: Romilda Santos - CRB-9/1214

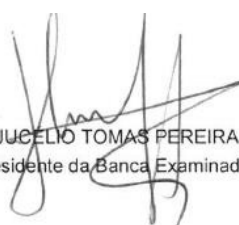


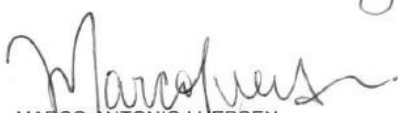
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA
MECÂNICA


TERMO DE APROVAÇÃO

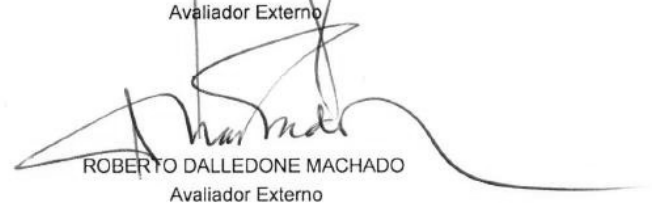
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **JEDERSON DA SILVA** intitulada: **OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS H-ADAPTATIVO FUNDAMENTADO NA RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ISOTRÓPICA E ANISOTRÓPICA**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa. A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.


Curitiba, 21 de Dezembro de 2017.


JUCELIO TOMAS PEREIRA
Presidente da Banca Examinadora


MARCO ANTONIO LUERSEN
Avaliador Externo


ANTONIO ANDRÉ NOVOTNY
Avaliador Externo


ROBERTO DALLEDONE MACHADO
Avaliador Externo


JOÃO ELIAS ABDALLA FILHO
Avaliador Externo

A minha esposa Ângela e aos meus pais José e Cleusa.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que por meio do seu amor, manifestado pela sua graça, tem dirigido a minha vida e provido todas as minhas necessidades.

Aos meus orientadores, os professores Dr. Jucélio Tomás Pereira e Dr. Carlos Alberto Bavastri, pela orientação na elaboração desta tese. Em especial, ao Prof. Jucélio que com profissionalismo, competência, dedicação, apoio e amizade, dirigiu de maneira agradável o desenvolvimento deste trabalho. Muito obrigado pelas inúmeras horas dedicadas à minha formação profissional e pessoal.

A minha esposa Ângela, pelo seu companheirismo e amizade, demonstrados pela sua compreensão, dedicação e amor. Obrigado por ter me sustentado e auxiliado em todo este percurso. A minha vida é agraciada pela sua presença.

Ao meu Pai, José, e a minha Mãe, Cleusa, que com muito amor e um incansável apoio, me ensinaram valores inestimáveis como a honestidade, a sinceridade, a importância e valor do trabalho árduo.

A minha família, em especial, aos meus irmãos Fernando e Grasi, pelos inúmeros momentos de alegria e pelas palavras de apoio que facilitaram essa trajetória.

Aos meus colegas do Laboratório de Vibrações e Mecânica dos Sólidos Computacional da UFPR, os quais hoje posso verdadeiramente chamá-los de amigos, meu muito obrigado pelas inúmeras conversas e cafezinhos que caracterizaram momentos de alegria e refrigério nesta caminhada.

A todos os meus amigos da Igreja Chácara Primavera de Curitiba, em especial, ao Danilo e a Letícia, que durante este período me proveram momentos de alegria, provas de amizades sinceras e palavras de encorajamento e apoio.

Aos professores, Dr. Antonio André Novotny, Dr. João Elias Abdalla Filho, Dr. Roberto Dalledone Machado e Dr. Marco Antônio Luersen, pelo tempo dispendido na leitura e avaliação do trabalho, colaborando para a melhoria desta tese.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PGMec – UFPR) pela infraestrutura fornecida para a realização desta tese.

A Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR – Londrina), em especial, aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica, por gerarem condições e facilitarem de maneira efetiva a conclusão deste trabalho através do meu afastamento integral.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro fornecido no primeiro ano deste trabalho.

A todos que, mesmo que indiretamente, contribuíram para o desenvolvimento desta tese.

“O Senhor é a minha rocha, a minha fortaleza
e o meu libertador;
o meu Deus é o meu rochedo,
em quem me refugio.
Ele é o meu escudo e o poder que me salva,
a minha torre alta.”
Salmos 18:2

“ Não há maior obstáculo ao conhecimento do
que o orgulho, e nenhuma condição mais
essencial do que a humildade.”
John Stott

RESUMO

O corrente trabalho propõe um novo esquema para obtenção de soluções estruturais com erros de discretização controlados. Este esquema é fundamentado na combinação da solução de um problema de otimização topológica contínua considerando uma Microestrutura Sólida Isotrópica e Penalizada (SIMP) e a utilização do Método dos Elementos Finitos h-adaptativo para o controle nodal do campo de densidades relativas e obtenção da solução aproximada do problema de valor de contorno associado. A avaliação dos erros de discretização é realizada por um estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação e considerando a abrupta variação das propriedades materiais. A estimativa das dimensões dos novos elementos pode ser conduzida através da aplicação de duas novas técnicas h-adaptativas, uma de natureza isotrópica (Recuperação da Densidade do Erro Isotrópica – IEDR) e outra anisotrópica (Recuperação da Densidade do Erro Anisotrópica – AEDR). Com isso, busca-se explorar as diversas possibilidades de discretização em problemas de otimização topológica. Ambas as técnicas são baseadas na construção da função densidade do erro em energia e na solução analítica de um problema de otimização. A implementação computacional é realizada pelo *software* Matlab® e a geração de malha conduzida pelo *software* *Bidimensional Anisotropic Mesh Generator* (BAMG). O desenvolvimento das técnicas IEDR e AEDR tem como origem a aplicação em problemas elípticos bidimensionais de segunda ordem considerando propriedades materiais constantes. Exemplos numéricos, com referência ao problema escalar de Poisson e ao problema de elasticidade linear, mostram que as novas técnicas h-adaptativas conduzem a malhas de elementos finitos satisfazendo os critérios de convergência e com erros de discretização aproximadamente equidistribuídos. Além disso, quando comparadas com técnicas clássicas de refino, as técnicas IEDR e AEDR apresentam taxas de convergência, em geral, iguais ou superiores. Por fim, os resultados numéricos da aplicação dessas técnicas em problemas de otimização topológica, considerando a abrupta variação das propriedades materiais, revelam o controle dos erros de discretização e um aumento na resolução do contorno material quando comparado com malhas uniformes ou quase uniformes.

Palavras-chave: Otimização Estrutural Topológica. h-adaptatividade. Método dos Elementos Finitos. Estimadores de erro *a posteriori*. Recuperação da Densidade do Erro.

ABSTRACT

The present work proposes a new scheme for obtaining structural solutions with controlled discretization errors. This scheme is based on the combination of the solution of a continuum topology optimization problem considering a Solid Isotropic Microstructure with Penalization (SIMP) and the use of the h-adaptive Finite Element Method for the nodal control of the relative density fields and to achieve the numerical solution of the associated boundary value problem. The evaluation of the discretization errors is performed by an a posteriori error estimator based on gradient recovery, while considering the abrupt variation of the material properties. The estimation of the new elements' dimensions can be realized by the application of two new h-adaptive techniques, one of isotropic nature (Isotropic Error Density Recovery – IEDR) and another of anisotropic nature (Anisotropic Error Density Recovery – AEDR). By using these tools, several discretization possibilities are explored in topology optimization problems. Both h-adaptive techniques are based on the construction of the energy error density function in conjunction with an optimization problem's analytical solution. The computational implementation is performed by Matlab® software, with mesh generation being conducted by the Bidimensional Anisotropic Mesh Generator (BAMG) software. The development of the IEDR and AEDR techniques is originated in its application for two-dimensional elliptic problems considering constant material properties. Numerical examples, with reference to the Poisson problem and linear elasticity problems, show that the new h-adaptive techniques lead to finite element meshes satisfying the convergence criteria with approximately equidistributed discretization errors. In addition, when compared to classical remeshing techniques, the IEDR and AEDR techniques have convergence rates, generally, equal or higher. Finally, the numerical results of applying these techniques to topological optimization problems, considering the abrupt variation of the material properties, demonstrates control of the discretization errors and an increase in the resolution of the material boundary when compared to uniform or quasi uniform meshes.

Keywords: Structural Topology Optimization. h-adaptivity. Finite Element Method. *A posteriori* error estimators. Error Density Recovery.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – EXEMPLO DE UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL: (A) DISCRETIZAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS. (B) TOPOLOGIA RESULTANTE.....	36
FIGURA 2 – PROBLEMA ESCALAR DE POISSON: EXEMPLO DE MALHA GERADA VIA TÉCNICA H-ADAPTATIVA: (A) ISOTRÓPICA. (B) ANISOTRÓPICA.	37
FIGURA 3 – COMPARAÇÃO ENTRE AS SOLUÇÕES GENÉRICA ANALÍTICA, NUMÉRICA E RECUPERADA.	51
FIGURA 4 – DEFINIÇÕES DE UM PROBLEMA GENÉRICO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.	67
FIGURA 5 – MODELO DE ELEMENTO FINITO EMPREGADO NO PROCESSO DE OETC.	74
FIGURA 6 – PROCEDIMENTO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OETC.	80
FIGURA 7 – TRIÂNGULO ÓTIMO COM ÁREA LIMITADA PELA FUNÇÃO DENSIDADE DO ERRO EM ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.	91
FIGURA 8 – REPRESENTAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS ANISOTRÓPICAS DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS: (A) K_r É UM TRIÂNGULO DE REFERÊNCIA EQUILÁTERO. (B) K É UM TRIÂNGULO GENÉRICO ISÓSCELES.	102
FIGURA 9 – ELIPSE ÓTIMA COM ÁREA LIMITADA PELA FUNÇÃO DENSIDADE DO ERRO EM ENERGIA.	109
FIGURA 10 – REPRESENTAÇÃO DO PROCESSO DE INTERSECÇÃO DE MÉTRICAS EM TORNO DE UM NÓ CENTRAL.	113
FIGURA 11 – CILINDRO SUBMETIDO À PRESSÃO INTERNA.	119
FIGURA 12 – EXEMPLO 1: (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS INICIAL. (B) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.	121
FIGURA 13 – RESULTADOS PARA EXEMPLO 1: (A) $NGL \times \eta$. (B) $NGL \times \zeta_m$	122
FIGURA 14 – RESULTADOS PARA EXEMPLO 1: (A) $NGL \times \zeta_{max}$. (B) $NGL \times D_\zeta$	122
FIGURA 15 – EXEMPLO 1, ITERAÇÃO ADAPTATIVA 1: (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (B) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.	123

FIGURA 16 – EXEMPLO 1, ITERAÇÃO ADAPTATIVA 2: (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (B) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.	124
FIGURA 17 – EXEMPLO 1, ITERAÇÃO ADAPTATIVA 3: (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (B) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.	125
FIGURA 18 – SOLUÇÃO ANALÍTICA DO EXEMPLO 2.	126
FIGURA 19 – EXEMPLO 2: (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS INICIAL. (B) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.	126
FIGURA 20 – RESULTADOS PARA EXEMPLO 2: (A) $NGL \times \eta$. (B) $NGL \times \zeta_m$.	127
FIGURA 21 – RESULTADOS PARA EXEMPLO 2: (A) $NGL \times \zeta_{max}$. (B) $NGL \times D_\zeta$.	127
FIGURA 22 – EXEMPLO 2, ITERAÇÃO ADAPTATIVA 1: (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (B) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.	129
FIGURA 23 – EXEMPLO 2, ITERAÇÃO ADAPTATIVA 2: (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (B) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.	130
FIGURA 24 – EXEMPLO 2, ITERAÇÃO ADAPTATIVA 3: (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (B) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.	131
FIGURA 25 – INTERSECÇÃO DE MÉTRICAS PARA DIFERENTES ORIENTAÇÕES E ALONGAMENTOS.	133
FIGURA 26 – SOLUÇÃO DO EXEMPLO 3.	134
FIGURA 27 – EXEMPLO 3: (A) MALHA INICIAL DE ELEMENTOS FINITOS. (B) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.	135
FIGURA 28 – EXEMPLO 3 CONSIDERANDO $\bar{\eta} = 2,50\%$: (A) $NGL \times \eta$. (B) $it \times ar_{max}$.	136
FIGURA 29 – EXEMPLO 3: MALHA DE ELEMENTOS FINITOS CONVERGENTE PARA $\bar{\eta} = 2.50\%$. (A) VISTA GLOBAL. (B) VISTA AMPLIADA DA REGIÃO $[0,70; 1,00]^2$.	137
FIGURA 30 – EXEMPLO 3: DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA PARA $\bar{\eta} = 2.50\%$. (A) VISTA GLOBAL. (B) VISTA AMPLIADA DA REGIÃO $[0,70; 1,00]^2$.	138
FIGURA 31 – SOLUÇÃO DO EXEMPLO 4.	139

FIGURA 32 – EXEMPLO 4: (A) MALHA INICIAL DE ELEMENTOS FINITOS. (B) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.....	139
FIGURA 33 – EXEMPLO 4 CONSIDERANDO $\bar{\eta} = 5.00\%$: (A) $NGL \times \eta$. (B) $it \times ar_{max}$.	141
FIGURA 34 – EXEMPLO 4: MALHA DE ELEMENTOS FINITOS CONVERGENTE PARA $\bar{\eta} = 5,00\%$. (A) VISTA GLOBAL. (B) VISTA AMPLIADA DA REGIÃO $[0,45; 0,65] \times [0,00; 0,20]$	141
FIGURA 35 – EXEMPLO 4: DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA PARA $\bar{\eta} = 5,00\%$. (A) VISTA GLOBAL. (B) VISTA AMPLIADA DA REGIÃO $[0,45; 0,65] \times [0,00; 0,20]$	142
FIGURA 36 – PROCEDIMENTO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OETC UTILIZANDO O MEF H-ADAPTATIVO.....	144
FIGURA 37 – BARRA SOB TRAÇÃO: MODELO MECÂNICO.....	147
FIGURA 38 – RESULTADOS PARA BARRA SOB TRAÇÃO E TÉCNICA IEDR AO FINAL DA: (A) PRIMEIRA ITERAÇÃO. (B) ITERAÇÃO ADAPTATIVA CONVERGENTE.....	148
FIGURA 39 – HISTÓRICOS DE CONVERGÊNCIA DOS FUNCIONAIS LAGRANGEANO AUMENTADO E ENERGIA TOTAL PARA BARRA SOB TRAÇÃO E TÉCNICA IEDR.....	149
FIGURA 40 – HISTÓRICOS DE CONVERGÊNCIA DOS FUNCIONAIS LAGRANGEANO AUMENTADO E ENERGIA TOTAL PARA BARRA SOB TRAÇÃO E TÉCNICA AEDR.....	150
FIGURA 41 – RESULTADOS PARA BARRA SOB TRAÇÃO E TÉCNICA AEDR AO FINAL DA: (A) PRIMEIRA ITERAÇÃO. (B) ITERAÇÃO ADAPTATIVA CONVERGENTE.....	151
FIGURA 42 – BARRA SOB TRAÇÃO: ERRO RELATIVO PERCENTUAL GLOBAL X NÚMERO DE VARIÁVEIS DE PROJETO.....	152
FIGURA 43 – BARRA SOB TRAÇÃO: ANÁLISE COMPARATIVA DAS TOPOLOGIAS FINAIS OBTIDAS CONSIDERANDO AS TÉCNICAS: (A) IEDR. (B) AEDR.....	153
FIGURA 44 – VIGA ENGASTADA I: MODELO MECÂNICO.....	154
FIGURA 45 – RESULTADOS AO FINAL DE CADA ITERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA E TÉCNICA IEDR: (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (B) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.....	155

FIGURA 46 – RESULTADOS AO FINAL DE CADA ITERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA E TÉCNICA IEDR: (A) TOPOLOGIA. (B) VISTA AMPLIADA NA REGIÃO $[0,25; 0,95] \times [0,0; 1,0]$.	156
FIGURA 47 – HISTÓRICOS DE CONVERGÊNCIA DOS FUNCIONAIS LAGRANGEANO AUMENTADO E ENERGIA TOTAL PARA VIGA ENGASTADA E TÉCNICA IEDR.	157
FIGURA 48 – HISTÓRICOS DE CONVERGÊNCIA DOS FUNCIONAIS LAGRANGEANO AUMENTADO E ENERGIA TOTAL PARA VIGA ENGASTADA E TÉCNICA AEDR.	158
FIGURA 49 – RESULTADOS AO FINAL DE CADA ITERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA E TÉCNICA AEDR: (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (B) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.	159
FIGURA 50 – RESULTADOS AO FINAL DE CADA ITERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA E TÉCNICA AEDR: (A) TOPOLOGIA. (B) VISTA AMPLIADA NA REGIÃO $[2,5; 9,5] \times [0,0; 10,0]$.	160
FIGURA 51 – VIGA ENGASTADA: ERRO RELATIVO PERCENTUAL GLOBAL X NÚMERO DE VARIÁVEIS DE PROJETO.	161
FIGURA 52 – VIGA ENGASTADA: ANÁLISE COMPARATIVA DAS TÉCNICAS IEDR E AEDR: (A) MALHAS FINAIS DE ELEMENTOS FINITOS. (B) TOPOLOGIAS FINAIS.	162
FIGURA 53 – VIGA ENGASTADA: ANÁLISE COMPARATIVA DAS TÉCNICAS IEDR E AEDR COM VISTA AMPLIADA NA REGIÃO $[2,5; 9,5] \times [1,0; 5,0]$: (A) MALHAS FINAIS DE ELEMENTOS FINITOS. (B) TOPOLOGIAS FINAIS.	163
FIGURA 54 – VIGA ENGASTADA: ANÁLISE COMPARATIVA DAS TÉCNICAS IEDR E AEDR COM VISTA AMPLIADA NA REGIÃO $[8,0; 14,5] \times [1,5; 8,5]$: (A) MALHAS FINAIS DE ELEMENTOS FINITOS. (B) TOPOLOGIAS FINAIS.	163
FIGURA 55 – VIGA ENGASTADA: ANÁLISE COMPARATIVA DAS TÉCNICAS IEDR E AEDR (A) TOPOLOGIAS FINAIS DEFORMADAS. (B) DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES ELEMENTARES DE VON MISES.	165
FIGURA 56 – VIGA ENGASTADA: RESULTADOS PARA UMA MALHA UNIFORME: (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (B) TOPOLOGIA FINAL VIA DENSIDADE DE CORTE. (C) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM	

ENERGIA BASEADOS EM DEFORMAÇÕES. (D) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA PROPOSTO.....	167
FIGURA 57 – VIGA BIAPOIADA: MODELO MECÂNICO.....	169
FIGURA 58 – VIGA BIAPOIADA: MALHA DE ELEMENTOS FINITOS INICIAL.	169
FIGURA 59 – VIGA BIAPOIADA, TOPOLOGIA FINAL AO TÉRMINO DA PRIMEIRA ITERAÇÃO PARA: (A) $r_p = 0,008$. (B) $r_p = 0,003$	170
FIGURA 60 – VIGA BIAPOIADA E TÉCNICA IEDR PARA A SOLUÇÃO CONVERGENTE ($r_p = 0,008$): (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (B) TOPOLOGIA FINAL.....	171
FIGURA 61 – VIGA BIAPOIADA E TÉCNICA AEDR PARA A SOLUÇÃO CONVERGENTE ($r_p = 0,008$): (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (B) TOPOLOGIA FINAL.....	171
FIGURA 62 – VIGA BIAPOIADA: ERRO RELATIVO PERCENTUAL GLOBAL X NÚMERO DE VARIÁVEIS DE PROJETO.....	172
FIGURA 63 – VIGA BIAPOIADA E TÉCNICA AEDR PARA A SOLUÇÃO CONVERGENTE ($r_p = 0,003$): (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (B) TOPOLOGIA FINAL.....	173
FIGURA 64 – VIGA BIAPOIADA E TÉCNICA AEDR: (A) VISTA AMPLIADA NA REGIÃO [0,0; 6,0] X [6,0; 12,0] E $r_p = 0,003$. (B) VISTA AMPLIADA NA REGIÃO [0,0; 6,0] X [0,0; 6,0] E $r_p = 0,008$	173
FIGURA 65 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL: MODELO MECÂNICO.	174
FIGURA 66 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL: (A) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS INICIAL. (B) TOPOLOGIA AO FINAL DA PRIMEIRA ITERAÇÃO.....	175
FIGURA 67 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL E TÉCNICA IEDR PARA A ITERAÇÃO CONVERGENTE.....	175
FIGURA 68 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL E TÉCNICA AEDR PARA A ITERAÇÃO CONVERGENTE.....	176
FIGURA 69 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL: ANÁLISE GRÁFICA COMPARATIVA DAS TOPOLOGIAS OBTIDAS CONSIDERANDO AS TÉCNICAS IEDR E AEDR.....	177

FIGURA 70 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL: ERRO RELATIVO PERCENTUAL GLOBAL X NÚMERO DE VARIÁVEIS DE PROJETO.	178
--	-----

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – EXEMPLO 1: CILINDRO SUBMETIDO A PRESSÃO INTERNA – PARÂMETROS DE QUALIDADE DA MALHA.	121
TABELA 2 – EXEMPLO 2: PROBLEMA DE POISSON – PARÂMETROS DE QUALIDADE DA MALHA.....	128
TABELA 3 – EXEMPLO 3: PARÂMETROS DO PROCESSO ADAPTATIVO PARA $\eta \leq \bar{\eta}$	135
TABELA 4 – EXEMPLO 3: PARÂMETROS DO PROCESSO ADAPTATIVO PARA $IT =$ 10.....	135
TABELA 5 – EXEMPLO 4: PARÂMETROS DO PROCESSO ADAPTATIVO PARA $\eta \leq \bar{\eta}$	140
TABELA 6 – EXEMPLO 4: PARÂMETROS DO PROCESSO ADAPTATIVO PARA $IT =$ 10.....	140
TABELA 7 – BARRA SOB TRAÇÃO: PARÂMETROS INICIAIS.	147
TABELA 8 – VIGA ENGASTADA: PARÂMETROS INICIAIS.	154
TABELA 9 – VIGA ENGASTADA: ANÁLISE COMPARATIVA DOS DESLOCAMENTOS, ENERGIA E TENSÕES NAS TOPOLOGIAS OTIMIZADAS PELAS TÉCNICAS IEDR E AEDR.	164
TABELA 10 – VIGA BIPOIADA: PARÂMETROS INICIAIS.	169
TABELA 11 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL: PARÂMETROS INICIAIS.....	174

LISTA DE SIGLAS

AEDR	<i>Anisotropic Error Density Recovery</i> (Recuperação Anisotrópica da Densidade do Erro).
AS	Análise de Sensibilidade.
BAMG	<i>Bidimensional Anisotropic Mesh Generator</i> (Gerador de Malha Anisotrópico Bidimensional).
BESO	<i>Bidirecional Evolutionary Structural Optimization</i> (Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional).
CAD	<i>Computer-Aided Design</i> (Desenho assistido por computador).
CNC	<i>Computer Numeric Control</i> (Controle Numérico Computadorizado).
CST	<i>Constant Strain Triangle</i> (Elemento Triangular de Deformação Constante).
CutFEM	<i>Cut Finite Element Method</i> .
E(.)	Distribuição dos erros em energia para a iteração (.).
HB	Borouchaki et al. (1997a, b)
IEDR	<i>Isotropic Error Density Recovery</i> (Recuperação Isotrópica da Densidade do Erro).
LB	Li e Bettess (1995).
M(.)	Malha de elementos finitos para a iteração (.).
MEF	Método dos Elementos Finitos.
OETC	Otimização Estrutural Topológica Contínua.
PPR	<i>Polynomial Preserving Recovery</i> (Recuperação Preservando Polinômio).
QER	<i>Quadratic Error Recovery</i> (Recuperação Quadrática do Erro)
RCP	<i>Recovery by Compatibility in Patches</i> (Recuperação por Compatibilidade de Padrões).
REP	<i>Recovery by Equilibration of Patches</i> (Recuperação por Equilíbrio de Padrões).
SCR	<i>The Superconvergent Cluster Recovery Method</i> (Método Superconvergente de Recuperação de Grupo).
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i> (Material Sólido Isotrópico com Penalização).
SPR	<i>Superconvergent Patch Recovery</i> (Superconvergente de Recuperação de Padrões).
SPR-C	<i>Constrained Superconvergent Patch Recovery</i> (Superconvergente de Recuperação de Padrões com Restrições).

SPRE	<i>Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium</i> (Superconvergente de Recuperação por Padrões utilizando Condições de Equilíbrio).
SPREB	<i>Superconvergent Patch Recovery Incorporating Equilibrium and Boundary Conditions</i> (Superconvergente de Recuperação por Padrões incorporando Condições de Equilíbrio e de Contorno).
T(.)	Topologia resultante para a iteração (.).
ULA	<i>Uniform Local Accuracy</i> (Acurácia Local Uniforme).
XFEM	<i>eXtended Finite Element Method</i> (Método Estendido dos Elementos Finitos).
ZT(.)	Vista ampliada da topologia resultante para a iteração (.).
ZZ	Zienkiewicz e Zhu.

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto Latino

a	Diâmetro maior de uma elipse.
ar	Razão de aspecto.
ar_{max}	Máxima razão de aspecto.
\bar{a}	Diâmetro maior associado à elipse de intersecção.
A_c	Área circular associada ao elemento K .
A_{elip}	Área de uma elipse ótima.
A_K	Área do elemento K .
\hat{A}_K	Área da elipse associada ao elemento K .
A_{med}	Área média decorrente das métricas de um padrão.
\bar{A}_{elip}	Área projetada pela intersecção de métricas.
b	Diâmetro menor de uma elipse.
\bar{b}	Diâmetro menor associado à elipse de intersecção.
\mathbf{b}	Vetor de forças de corpo.
\mathbf{B}	Matriz contendo as derivadas das funções de interpolação.
$\mathbf{B}_{\nabla u}$	Matriz com os coeficientes do campo linear da diferença entre os gradientes.
\mathbf{B}_{ρ_K}	Matriz com as derivadas das funções de forma aplicadas ao campo escalar de densidades.
\mathbf{B}_σ	Matriz com os coeficientes do campo linear da diferença entre as tensões.
$\mathbf{B}_{\nabla u}^i$	Vetor característico da matriz $\mathbf{B}_{\nabla u}^{REC}$ associado a componente i dessa matriz.
\mathbf{B}_σ^{ij}	Vetor característico da matriz \mathbf{B}_σ^{REC} associado a componente ij dessa matriz.
\mathbf{B}_σ^{REC}	Matriz com os coeficientes dos campos lineares das tensões recuperadas.
$\mathbf{B}_{\nabla u}^{REC}$	Matriz com os coeficientes dos campos lineares dos gradientes recuperados.
$\bar{\mathbf{B}}_{\rho_K}$	Matriz simétrica auxiliar utilizada na análise de sensibilidade de f_ρ .
$B(\cdot, \cdot)$	Forma bilinear contínua e simétrica.
c	Função energia total de deformação acumulada na estrutura.
C	Constante associada a projeções de erro no MEF.

\bar{C}	Constante de aceleração dos métodos h-adaptativos.
d	Dimensão física do domínio do problema.
d_i	i-ésimo autovetor associado as direções principais de W .
D_0	Tensor constitutivo material sem porosidade.
D_ρ	Tensor constitutivo isotrópico do material considerando uma microestrutura artificial do tipo SIMP.
D_ζ	Medida do desvio dos parâmetros de refinamento.
e	Função vetorial erro em deslocamentos.
e_ε	Função vetorial erro em deformações.
e_σ	Função vetorial erro em tensões.
e_K	Espessura do elemento K .
E	Módulo de elasticidade longitudinal.
E_{elip}	Erro total em um elipse de diâmetros a e b .
E_K	Norma do erro em energia para uma região de domínio triangular.
E_{new}	Norma do erro em energia para uma região de domínio triangular, avaliada para a malha futura.
\bar{e}	Erro limite por elemento.
$\ e\ $	Norma do erro em energia para o problema de Poisson.
$\ e\ $	Norma do erro em energia.
$\ e\ _K$	Norma do erro em energia avaliada para o elemento K .
$\ e\ _\varepsilon$	Norma do erro em energia considerando deformações.
$\ e\ _\sigma$	Norma do erro em energia considerando tensões e a oscilação das propriedades materiais.
$\ \tilde{e}\ _K$	Norma do erro em energia posta em função da variação das propriedades materiais e definida em uma região do domínio qualquer.
$\ e^{est}\ $	Norma do erro em energia estimada segundo um estimador de erro <i>a posteriori</i> baseado em recuperação.
$\ e_{old}\ _K$	Norma do erro em energia para o elemento K da malha corrente posta em função da densidade do erro em energia.

$\ e_{new}\ _K$	Norma do erro em energia para o elemento K da malha adaptada posta em função da densidade do erro em energia.
$\ e^{REC}\ $	Norma do erro em energia estimada para o problema de Poisson.
$\ e^{REC}\ _K$	Norma do erro em energia estimada para o elemento K e o problema de Poisson.
f	Função escalar de excitação de domínio.
f_m	Função de penalização para os valores de densidades intermediárias.
f_p	p-ésima função objetivo.
f_ρ	Função integrando para regularização do campo de densidades.
\mathbf{F}	Vetor de forças nodais consistentes.
$F(\cdot)$	Funcional contínuo e linear.
FS	Fator de alongamento.
FS_{max}	Fator de alongamento máximo.
g	Função de restrição do erro em um elemento de domínio triangular.
g_{elip}	Função de restrição do erro em um elemento de domínio elíptico.
\mathbf{G}	Termo linear associado à forma explícita da função densidade do erro em energia.
$\hat{\mathbf{G}}$	Termo linear associado a função densidade do erro em energia e avaliado para o sistema de referência $(\hat{x} - \hat{y})$.
$\tilde{\mathbf{G}}$	Termo linear associado à forma explícita da função densidade do erro em energia considerando a variação das propriedades materiais.
\mathbf{G}_K	Matriz simétrica associada aos gradientes da função v_e .
h	Medida do tamanho de um elemento genérico qualquer.
h_n	Tamanho do elemento em uma direção \mathbf{n} .
h_{new}	Medida do novo tamanho do elemento em uma nova malha.
h_{old}	Medida do tamanho do elemento na malha corrente.
h_v	Restrição de igualdade sobre o volume da estrutura.
$H^p(\Omega)$	Espaço de funções de Hilbert de ordem p definido no domínio Ω .

$H_0^p(\Omega)$	Espaço de funções de Hilbert de ordem p definido no domínio Ω e com suporte compacto.
\mathbf{H}	Matriz Hessiana do erro.
$\tilde{\mathbf{H}}$	Matriz Hessiana do erro associada à forma explícita da função densidade do erro em energia considerando a variação das propriedades materiais.
$\hat{\mathbf{H}}$	Matriz Hessiana do erro avaliada para o sistema de referência $(\hat{x} - \hat{y})$.
it	Número de iterações adaptativas para alcançar a tolerância desejada.
I^A	Indicador de erro anisotrópico global.
I_h	Operador interpolante de Clément ou Scott-Zhang.
I^I	Indicador de erro isotrópico global.
I_K^A	Indicador de erro anisotrópico para o elemento K .
I_K^I	Indicador de erro isotrópico para o elemento K .
I_{K_x}, I_{K_y}	Momento de inércia de segunda ordem de área do triângulo em relação à x e y .
$I_{x'}, I_{y'}$	Momento de inércia de segunda ordem de área da elipse em relação à x' e y' .
$\hat{I}_{K_x}, \hat{I}_{K_y}$	Momento de inércia de segunda ordem de área da elipse em relação à \hat{x} e \hat{y} .
\mathbf{J}_K	Tensor Jacobiano associado ao elemento K .
\mathbf{k}	Tensor linear de segunda ordem.
\mathbf{K}	Matriz de rigidez global.
\mathbf{K}_K	Matriz de rigidez do elemento K .
K_r	Triângulo equilátero de referência.
$l_{(\cdot)}$	Dimensão genérica.
L	Função Lagrangeano.
L_c	Medida característica do domínio.
L_{elip}	Função Lagrangeano associada a um domínio elíptico.
L^2	Espaço de funções quadraticamente integráveis.
\bar{L}	Função Lagrangeano Aumentado.
\bar{L}_K	Limite superior associado à norma L^2 .
L^∞	Espaço de funções essencialmente limitadas.
m	Maior ordem de diferenciação do operador deformação.

\mathbf{M}	Tensor métrico genérico.
\mathbf{M}_{HB}	Métrica de intersecção segundo Borouchaki et al. (1997a).
\mathbf{M}_P	Métrica de intersecção escalonada associada ao nó P .
$\mathbf{M}^{(K)}$	Tensor Métrico associado ao K -ésimo elemento da malha.
nf	Número total de funções objetivos.
nh	Número de restrições de igualdade associadas a um problema de otimização.
ng	Número de restrições de desigualdade associadas a um problema de otimização.
nvp	Número de variáveis de projeto.
\mathbf{n}	Direção normal.
\mathbf{N}	Direção qualquer.
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais.
NEI	Número total de elementos na malha.
NGL	Número total de graus de liberdade.
NP	Número de elementos em um padrão.
NEI_{new}	Estimativa do número total de elementos em uma malha adaptada.
$N_{nós}$	Número de nós em um elemento.
p	Grau polinomial da aproximação de MEF.
P_{elip}	Problema de otimização associado à técnica AEDR.
\mathbf{P}	Vetor de coordenadas relativas de um ponto qualquer.
\mathbf{P}_K	Matriz ortogonal para o elemento K obtida a partir de uma decomposição de valor singular.
q	Constante relacionada à microestrutura artificial do tipo SIMP.
r	Raio.
r_e	Raio externo.
r_i	Raio interno.
r_p	Fator de penalização quadrática associado ao P -ésimo subproblema.
$r_p^{máx}$	Valor máximo de r_p .
r_m, r_ρ	Fatores de penalização relacionados a regularização do problema de otimização.

r^*	Constante que atualizada a função densidade do erro associada à técnica IEDR.
R	Espaço dos números reais.
\mathbf{R}	Matriz ortogonal contendo os autovetores associados às direções principais da matriz Hessiana do erro.
\mathbf{R}_K	Matriz ortogonal para o elemento K obtida a partir de uma decomposição de valor singular.
\mathbf{R}_W	Matriz contendo os autovetores de \mathbf{W} .
$\mathbf{r}_{i,K}$	i -ésima direção da elipse que engloba o elemento K .
\mathbf{s}_K	Matriz diagonal contendo informações do tamanho do elemento.
$s_{i,K}$	i -ésimo raio da elipse que engloba o elemento K .
t	Razão entre o raio externo e interno de um cilindro.
tr	Operador que define o traço de uma matriz.
\mathbf{t}_k	Vetor translação associado ao elemento K .
$\bar{\mathbf{t}}$	Carregamento distribuído externo de superfície.
T_K	Identifica o elemento K .
\mathbf{T}_K	Transformação linear de coordenadas.
u	Solução analítica escalar.
u_r	Deslocamentos radiais.
u^{MEF}	Função solução via Método dos Elementos Finitos.
\bar{u}	Valor escalar de deslocamento prescrito.
\mathbf{u}	Função vetorial analítica do campo de deslocamentos.
\mathbf{u}_K	Vetor de deslocamentos do elemento K .
\mathbf{u}^{MEF}	Função de deslocamentos aproximados via Método dos Elementos Finitos.
$\bar{\mathbf{u}}$	Vetor de variáveis primárias nodais.
U	Função densidade do erro em energia.
U^{MEF}	Subespaço de funções de \bar{U} .
\bar{U}	Espaço de funções.
\hat{U}	Função densidade do erro avaliada para o sistema de referência $(\hat{x} - \hat{y})$.
\tilde{U}	Função densidade do erro em energia considerando a oscilação das propriedades materiais.

\tilde{U}_0	Termo constante associado à forma explícita da função densidade do erro em energia considerando a variação das propriedades materiais.
\tilde{U}'	Função densidade do erro em energia de deformação modificada e definida com base em um sistema de coordenadas rotacionado.
U_0, \hat{U}_0	Termo constante associado à forma explícita da função densidade do erro em energia.
$\tilde{U}_{new}, \bar{U}_{new}$	Função da densidade do erro em energia e seu valor médio para um elemento da malha adaptada.
$\tilde{U}_{old}, \bar{U}_{old}$	Função da densidade do erro em energia e seu valor médio para um elemento da malha corrente.
$\ \mathbf{u}\ , \ \mathbf{u}\ $	Medida da energia analítica total acumulada no sistema considerando, respectivamente, os problemas de elasticidade e de Poisson.
$\ \mathbf{u}^{MEF}\ , \ \mathbf{u}^{MEF}\ $	Energia total acumulada no sistema obtida via MEF considerando, respectivamente, os problemas de elasticidade plana e de Poisson.
$\ \mathbf{u}\ _\varepsilon, \ \mathbf{u}\ _\sigma$	Medida da energia analítica total acumulada para problemas de OETC considerando, respectivamente, deformações e tensões.
$\ \mathbf{u}\ _\varepsilon^{MEF}, \ \mathbf{u}\ _\sigma^{MEF}$	Energia total acumulada obtida via MEF para problemas de OETC considerando, respectivamente, deformações e tensões.
v	Função escalar de variação cinematicamente admissível.
v_e	Função pertencente ao espaço $H^1(\Omega)$.
v^{MEF}	Função de variação cinematicamente admissível pertencente a V^{MEF} .
V_h	Espaço de funções lineares e contínuas por partes.
V^{MEF}	Subespaço de funções de \bar{V} .
V, V_0	Volume final e inicial da estrutura.
\bar{V}	Espaço de funções.
\mathbf{W}	Matriz característica associada à intersecção de métricas segundo Borouchaki et al. (1997a).
\mathbf{x}	Vetor de coordenadas.
\mathbf{x}_r	Vetor de coordenadas para um domínio circular de referência.

\mathbf{x}'	Vetor de coordenadas relativas, definidas segundo os eixos principais da matriz Hessiana do erro.
$\hat{\mathbf{x}}$	Vetor de coordenadas relativas obtidas por meio da matriz de rotações \mathbf{R}_K .
$\tilde{\mathbf{x}}$	Vetor de variáveis de projeto.
\mathbf{Z}	Matriz simétrica associada à forma explícita da função densidade do erro em energia.
z	Valor escalar constante que define a taxa de aumento de r_p .
$\tilde{\mathbf{Z}}$	Matriz simétrica associada à forma explícita da função densidade do erro em energia considerando variação das propriedades materiais.

Alfabeto Grego

α	Constante associada à área de um elemento triangular equilátero.
$\bar{\alpha}$	Constante associada a progressão das dimensões encontradas para a técnica AEDR.
β	Constante associada ao momento de segunda ordem de área de um elemento triangular equilátero.
γ	Fator de escalonamento h-adaptativo.
Γ	Contorno do domínio.
Γ_m	Parcela do contorno do domínio ocupada por material.
Γ_D	Parcela do contorno do domínio com condições de Dirichlet prescritas.
Γ_F	Parcela do contorno do domínio com condições de Neumann homogêneas.
Γ_N	Parcela do contorno do domínio com condições de Neumann não homogêneas.
Δ_K	Padrão de elementos que possuem pelo menos um vértice em comum com o elemento K .
Δu	Vetor da diferença entre os gradientes obtidos via MEF e os gradientes recuperados.
$\Delta \sigma$	Vetor da diferença entre as tensões obtidas via MEF e as tensões recuperadas.
∇	Operador gradiente.
∇^s	Operador gradiente simétrico.
∇u	Gradiente da solução analítica.

∇u^{FEM}	Gradiente da solução aproximada via MEF.
∇u^{REC}	Gradiente recuperado da solução aproximada.
$\nabla \rho$	Gradiente do campo de densidades.
ϵ	Campo de deformações analítico.
ϵ^{MEF}	Campo de deformações aproximado via MEF.
δ	Função escalar de x e y .
δ_0	Constante associada a uma função escalar.
η	Erro relativo percentual em energia analítico.
η^{est}	Erro relativo percentual em energia estimado.
η_L	Multiplicador de Lagrange.
η_P	Multiplicador de Lagrange associado ao P -ésimo subproblema.
η_ϵ	Erro relativo percentual em energia estimado segundo um campo de deformações e considerando problemas de OETC.
η_σ	Erro relativo percentual em energia estimado segundo um campo de tensões e considerando problemas de OETC.
$\bar{\eta}$	Erro relativo percentual admissível global.
η^*	Multiplicador de Lagrange no ponto de ótimo.
θ^A	Índice de efetividade global anisotrópico.
θ^{ZZ}	Índice de efetividade global para estimador ZZ .
\mathcal{G}_{ij}	Função auxiliar para análise de sensibilidade.
κ	Constante associada a uma função escalar.
λ	Fração material.
λ	Matriz diagonal com os autovalores da matriz Hessiana do erro modificada.
λ^*	Multiplicador de Lagrange.
Λ	Matriz diagonal contendo as dimensões do elemento obtidas por uma projeção anisotrópica.
μ	Valor mínimo entre o grau polinomial e a intensidade de uma singularidade geométrica.
ν	Coefficiente de Poisson.
ζ_K	Parâmetro de refinamento do elemento K .

ζ_m	Média simples dos parâmetros de refinamento.
ζ_{max}	Máximo parâmetro de refinamento.
ρ	Densidade material relativa.
ρ_{min}	Limite mínimo arbitrado para a densidade aparente.
ρ_K	Densidade material relativa avaliada para o elemento K .
ρ_K^i	Valor escalar da i -ésima componente nodal das densidades relativas para o elemento K .
$\bar{\rho}$	Média simples dos valores de densidades nodais no elemento.
ρ^*	Campo de densidades ótimo.
ρ_K	Vetor coluna contendo as componentes nodais de densidade para o elemento K .
σ_r	Componente de tensão radial.
σ_t	Componente de tensão tangencial.
σ_{11}, σ_{22}	Componentes de tensões normais no plano.
σ	Campo de tensões analítico.
σ^{MEF}	Campo de tensões aproximado via MEF.
σ^{REC}	Campo de tensões recuperado.
σ_ρ^{MEF}	Campo de tensões aproximado, considerando a oscilação do campo de densidades.
σ_ρ^{REC}	Campo de tensões recuperado, considerando a oscilação do campo de densidades.
$^{(i)}\sigma_\rho^{REC}$	Campo de tensões recuperado para o i -ésimo nó do elemento, considerando a oscilação do campo de densidades.
τ_i	Valor escalar associado à intersecção de métricas HB.
τ_{12}	Tensão cisalhante no plano.
ϕ	Valor escalar que representa a intensidade de uma singularidade geométrica.
ϕ_i	Valor escalar associado à intersecção de Métricas HB.
ϕ	Matriz linha contendo as funções de interpolação lineares.
χ	Função objetivo do problema de otimização regularizado.
ψ	Ângulo em relação ao eixo x .

ω	Valor escalar maior que a unidade.
Ω	Domínio do problema.
Ω_K	Domínio do elemento K .
$\bar{\Omega}_K$	Domínio genérico no entorno do elemento K .
Ω_K^T	Domínio triangular genérico com origem no baricentro do elemento K .
Ω_m	Parcela do domínio ocupada por material.
Ω_v	Parcela do domínio ocupada por vazios.
$ \bar{\Omega}_K $	Medida de um domínio genérico no entorno do elemento K .
$(\cdot)_G[\delta\rho_i]$	Operador diferencial de Gateaux aplicado ao funcional (\cdot) .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	34
1.1	OBJETIVOS	37
1.1.1	Objetivos Gerais.....	37
1.1.2	Objetivos Específicos.....	38
1.2	ESTRUTURA DO TEXTO	38
2	REVISÃO DA LITERATURA	40
2.1	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	40
2.1.1	Definição matemática de um problema geral de otimização	40
2.1.2	Otimização estrutural topológica	41
2.2	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS H-ADAPTATIVO	46
2.2.1	Método dos Elementos Finitos.....	47
2.2.2	Estimativas de erro de discretização	48
2.2.3	h-adaptatividade em Elementos Finitos	52
2.2.3.1	Estratégias adaptativas h-isotrópicas	53
2.2.3.2	Estratégias adaptativas h-anisotrópicas	56
2.3	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA CONTÍNUA E ADAPTATIVIDADE DE MALHA	60
2.4	PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO PROPOSTO.....	65
3	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA CONTÍNUA DE MÍNIMA FLEXIBILIDADE E RESTRIÇÃO SOBRE O VOLUME MATERIAL	67
3.1	DEFINIÇÃO GENÉRICA DE UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	67
3.2	PROBLEMA DE MÍNIMA FLEXIBILIDADE COM RESTRIÇÃO SOBRE O VOLUME MATERIAL.....	69
3.3	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO VIA MÉTODO DO LAGRANGEANO AUMENTADO	71
3.4	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO FUNCIONAL LAGRANGEANO AUMENTADO.....	73
3.4.1	Análise da sensibilidade do funcional $c(\rho)$	75

3.4.2	Análise da sensibilidade do funcional $r_m \int_{\Omega} f_m(\rho) d\Omega$	77
3.4.3	Análise da sensibilidade do funcional $r_{\rho} \int_{\Omega} f_{\rho}(\rho) d\Omega$	77
3.4.4	Análise da sensibilidade do funcional $\eta_{\rho} h_{\nu}(\rho)$	79
3.4.5	Análise da sensibilidade do funcional $r_{\rho} h_{\nu}(\rho)^2$	79
3.5	PROCEDIMENTO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	80
4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS H-ADAPTATIVO ISOTRÓPICO: RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ISOTRÓPICO	82
4.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS H-ADAPTATIVO: FORMULAÇÃO	82
4.2	RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ISOTRÓPICO – IEDR: APLICAÇÃO A PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	86
4.2.1	Definição da função densidade do erro em energia de deformação	86
4.2.2	Cálculo do erro total em uma região triangular no entorno de um elemento	90
4.2.3	Projeto da nova geometria do elemento via otimização	91
4.2.4	Processo iterativo da busca do novo elemento	94
4.3	RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ISOTRÓPICO – IEDR: APLICAÇÃO AO PROBLEMA ELÍPTICO DE SEGUNDA ORDEM DO TIPO POISSON	96
4.3.1	Problema de Poisson: estimativa dos erros de discretização e definição do erro admissível	96
4.3.2	IEDR: Aplicação em problemas elípticos escalares sem variação das propriedades	98
5	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS H-ADAPTATIVO ANISOTRÓPICO: RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ANISOTRÓPICO	101
5.1	INDICADOR DE ERRO ANISOTRÓPICO	101
5.1.1	Definição dos parâmetros anisotrópicos de uma malha de elementos finitos	101
5.1.2	Indicador de erro anisotrópico baseado na recuperação de derivadas de primeira ordem	102
5.1.3	Fundamentação matemática do indicador de erro anisotrópico	104
5.1.4	Redução para o caso isotrópico	106

5.2	RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ANISOTRÓPICA – AEDR: APLICAÇÃO EM OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA.....	106
5.2.1	Cálculo do erro total em uma região elíptica qualquer no entorno de um elemento	107
5.2.2	Projeto do elemento anisotrópico através de um problema de otimização	108
5.2.3	Definição do tensor métrico no elemento	111
5.2.4	Definição da malha de parâmetros e geração da nova malha via gerador de malha BAMG	112
5.3	RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ANISOTRÓPICA – AEDR: APLICAÇÃO AO PROBLEMA DE POISSON	116
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES: APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS IEDR E AEDR EM PROBLEMAS ELÍPTICOS.....	118
6.1	RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ISOTRÓPICA – IEDR: EXEMPLOS NUMÉRICOS	118
6.1.1	Exemplo 1: Cilindro de parede espessa submetido a pressão interna.....	119
6.1.2	Exemplo 2: Problema de Poisson	125
6.2	RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ANISOTRÓPICA – AEDR: EXEMPLOS NUMÉRICOS	131
6.2.1	Intersecção de métricas	132
6.2.2	Exemplo 3	134
6.2.3	Exemplo 4	138
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES: APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS IEDR E AEDR EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA	143
7.1	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA COM H-ADAPTATIVIDADE	144
7.1.1	Estimativa dos erros de discretização e definição do critério de convergência	145
7.1.2	Recuperação do campo de densidades	146
7.2	BARRA SOB TRAÇÃO.....	147
7.2.1	Resultados IEDR.....	147
7.2.2	Resultados AEDR	150
7.2.3	Comparação das técnicas h-adaptativas	152
7.3	VIGA ENGASTADA	154
7.3.1	Resultados IEDR.....	154

7.3.2 Resultados AEDR	158
7.3.3 Comparação das técnicas h-adaptativas.....	161
7.3.4 Resultados para uma malha uniforme.....	166
7.4 VIGA BIAPOIADA.....	168
7.5 PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL	174
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	179
8.1 CONCLUSÕES	179
8.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	181
REFERÊNCIAS	184

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, a busca por produtos de menores custos, eficientes, projetados e fabricados em um reduzido intervalo de tempo é uma questão de sobrevivência para as indústrias. Considerando componentes mecânicos e estruturais, são vários os processos de fabricação de alta precisão que têm surgido (corte a laser, máquinas de usinagem CNC, manufatura aditiva, etc.), aumentando as possibilidades e diminuindo as limitações na fase de projeto. Portanto, pode-se assumir que grande parte do impacto no custo, eficiência e tempo de lançamento de um produto está associada às metodologias de projeto e concepção.

Neste sentido, uma alternativa é o emprego de técnicas de **otimização estrutural**. Estas, buscam encontrar o projeto estrutural que satisfaça um determinado conjunto de restrições e minimize uma ou várias funções de qualidade da performance da estrutura, também denominadas de funções objetivo. Para tal, pode-se modificar o contorno, as propriedades materiais, as dimensões e/ou a topologia do componente estrutural (VASILIEV; GÜRDAL, 1999). Por exemplo, na concepção de um componente mecânico, pode-se minimizar a massa (portanto, reduzir o custo) com restrição sobre algum determinado critério de falha material.

As técnicas de otimização estrutural podem ser divididas em três diferentes categorias: dimensional ou paramétrica (*sizing optimization*), de forma (*shape optimization*) e de topologia (*topology optimization*) (PEREIRA, 2001; BENDSØE; SIGMUND, 2003). Em um típico problema de otimização dimensional, a geometria da estrutura é fixa ao longo do processo de otimização e as variáveis de projeto são dimensões geométricas como espessura, área e volume (STOLPE, 2003; BENDSØE; SIGMUND, 2003; STAINKO, 2006a). Um exemplo de otimização dimensional é a determinação da distribuição da espessura ótima de uma placa elástica e linear (STOLPE, 2003). Já otimização de forma visa determinar a configuração ótima dos contornos da estrutura (BENDSØE; SIGMUND, 2003; STOLPE, 2003), sendo aplicada, por exemplo, a problemas de concentração de tensões (STOLPE, 2003). Em **otimização topológica**, as formas, dimensões e conectividade da estrutura (admite-se a inserção de furos ao longo do domínio) são determinados simultaneamente no processo (BENDSØE, 1995; BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Considerando o tipo de estrutura envolvida, a otimização estrutural topológica pode ser dividida em discreta ou contínua (PEREIRA, 2001). Para estruturas discretas, como treliças e pórticos, o problema de topologia consiste na determinação do número, tamanho, posição e conectividade dos elementos (ROZVANY, 1997). Para estruturas contínuas,

tratadas no presente trabalho, o problema resume-se a encontrar a forma dos contornos internos e externos da estrutura e o número, a localização e forma de furos ou vazios (BENDSØE, SIGMUND, 2003).

Entre os métodos frequentemente empregados para obtenção de topologias ótimas, destacam-se aqueles baseados em microestruturas. Nestes, as variáveis de projeto são as densidades materiais relativas, ρ , onde $\rho=0$ indica ausência de material e $\rho=1$ a existência de material. No corrente estudo é utilizada uma Microestrutura Sólida Isotrópica com Penalização (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization* – SIMP) (BENDSØE, 1989; BENDSØE; SIGMUND, 1999).

Neste ponto, cabe ressaltar que, para a obtenção de uma topologia ótima através de um processo de otimização, é necessária a utilização de um método numérico para a solução do problema de valor de contorno associado à estrutura em estudo. Portanto, uma vez que existem erros associados à aplicação desses métodos, é razoável admitir que a qualidade da topologia final obtida seja dependente da solução aproximada encontrada. Aqui, é utilizado o **Método dos Elementos Finitos** (MEF) para resolver numericamente o problema de valor de contorno.

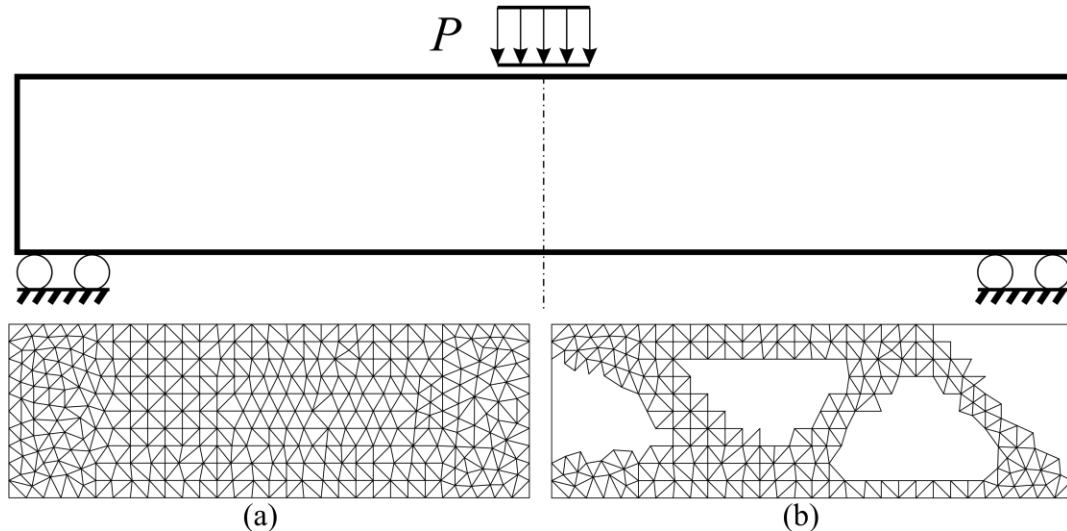
Em uma discretização de elementos finitos, as densidades materiais relativas, geralmente, estão associadas aos elementos ou nós da malha. Na FIGURA 1, é apresentado um clássico problema de otimização estrutural topológica contínua (OETC), onde a função objetivo é a flexibilidade da estrutura e a restrição é sobre o volume material. Na parte superior é exposto o modelo mecânico, com a malha original de elementos finitos e a topologia resultante (utilizando um modelo de elementos finitos somente da metade direita da estrutura) representadas, respectivamente, na FIGURA 1(a) e FIGURA 1(b).

Observa-se que a utilização de uma malha grosseira acarreta em uma má resolução do contorno material, dificultando a definição do projeto estrutural ótimo (MAUTE; RAMM, 1995). Tradicionalmente, este problema é superado empregando uma malha uniforme fixa e com um número relativamente grande de elementos. Porém, o emprego deste tipo de discretização, além de não representar um controle adequado dos erros de discretização, ocasionados pela aplicação do MEF, pode elevar significativamente o custo computacional da análise. Neste contexto, têm surgido diversas metodologias unindo técnicas h-adaptativas a processos de otimização topológica.

Técnicas h-adaptativas consistem na modificação do tamanho dos elementos na malha, contanto que o grau polinomial da aproximação de elementos finitos não seja alterado (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Esta modificação é, em geral, guiada por informações

locais de estimadores de erros, com vista à obtenção de uma solução convergente e aceitável. Uma das alternativas é estimar as novas dimensões dos elementos e realizar uma reconstrução completa da malha de elementos finitos utilizando geradores de malhas (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987).

FIGURA 1 – EXEMPLO DE UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL: (a) DISCRETIZAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS. (b) TOPOLOGIA RESULTANTE.



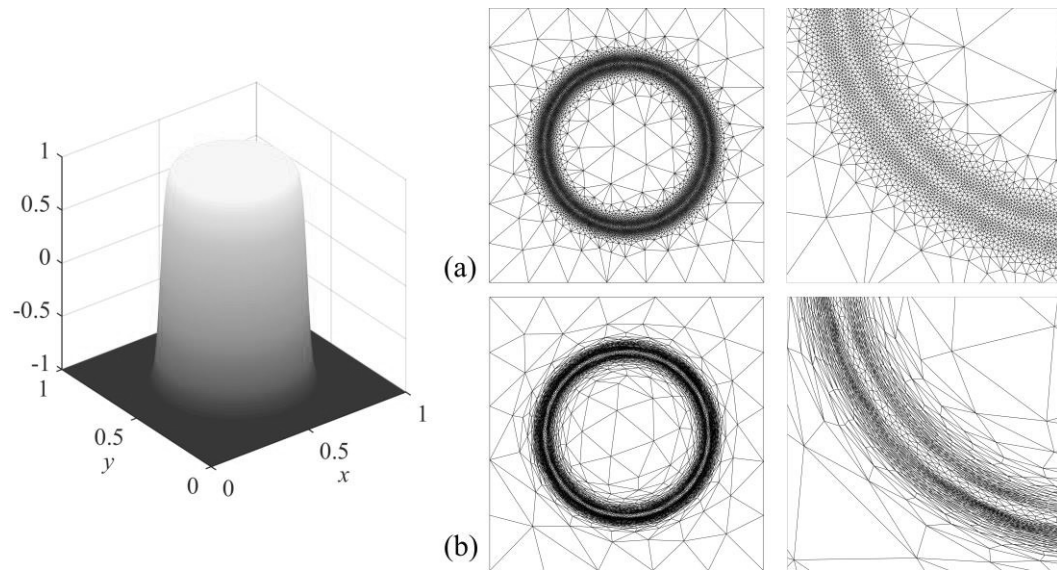
FONTE: O autor (2017).

As técnicas h-adaptativas podem ser divididas, quanto às características geométricas dos elementos gerados, em isotrópicas e anisotrópicas. Na FIGURA 2 é exposto um exemplo gráfico das diferenças entre malhas adaptadas do tipo isotrópicas (FIGURA 2(a)) e anisotrópicas (FIGURA 2(b)), resultantes de um problema elíptico do tipo Poisson. Em malhas isotrópicas os elementos são aproximadamente equiláteros, enquanto que em malhas anisotrópicas os elementos podem possuir elevadas razões de aspecto e devem ser adequadamente orientados. Como consequência, em geral, para um igual nível de erro, a utilização de técnicas h-anisotrópicas conduzem a malhas com um número significativamente inferior de vértices do que as originadas por técnicas isotrópicas (HUANG, 2005; PEREIRA; SILVA, 2017).

Entre as vantagens de aliar técnicas h-adaptativas a problemas de otimização topológica estão: (a) melhor definição do contorno material (MAUTE; RAMM, 1995; COSTA JR.; ALVES, 2003; STAINKO, 2006b; BRUGGI; VERANI, 2011; NGUYEN et al., 2012; WANG et al., 2013; WANG; KANG; HE 2014; NGUYEN-XUAN, 2017), (b) diminuição do custo computacional quando comparado com o processo de otimização para

uma malha fina fixa e uniforme (GUEST; GENUT, 2010; BRUGGI; VERANI, 2011; NGUYEN et al., 2012; WANG et al. 2013; WANG; KANG; HE, 2014; NGUYEN-XUAN, 2017) e (c) controle dos erros de discretização (WANG; KANG; HE, 2014; GONÇALVES, 2016).

FIGURA 2 – PROBLEMA ESCALAR DE POISSON: EXEMPLO DE MALHA GERADA VIA TÉCNICA h-ADAPTATIVA: (a) ISOTRÓPICA. (b) ANISOTRÓPICA.



FONTE: O autor (2017).

Com base nestas vantagens e considerando que a utilização de malhas anisotrópicas em problemas de otimização topológica é encontrada, no tocante ao conhecimento do autor, somente nos trabalhos de JENSEN (2016a, 2016b, 2017), os objetivos desta tese são apresentados na Seção 1.1. Os principais pontos abordados por Jensen (2016a, 2016b, 2017) são descritos ao longo do Capítulo de Revisão da Literatura, cuja última Seção apresenta o que se considera como as principais contribuições desta tese em relação ao atual estado da arte.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivos Gerais

Este estudo tem por objetivo desenvolver um novo esquema para obtenção de soluções estruturais topológicas com erros de discretização controlados. Este esquema baseia-se na utilização de uma microestrutura do tipo SIMP em conjunto com técnicas de h-

adaptatividade de malha aplicada ao MEF. Estas técnicas devem considerar a abrupta variação das propriedades materiais, explorando a utilização de malhas isotrópicas e anisotrópicas. Com isso, espera-se obter uma forma efetiva do controle dos erros de discretização ao longo do domínio e uma melhor definição do contorno do componente mecânico quando comparado com a aplicação do processo de otimização através de malhas uniformes ou quase uniformes.

1.1.2 Objetivos Específicos

O objetivo geral pode ser detalhado nos seguintes objetivos específicos:

- i. Desenvolver, implementar e validar novas metodologias h-adaptativas, sejam elas isotrópicas ou anisotrópicas, com aplicação em problemas elípticos bidimensionais solucionados via MEF.
- ii. Aplicar metodologias de refino isotrópico e anisotrópico a problemas de OETC, de forma a considerar a abrupta variação das propriedades materiais.
- iii. Validar o esquema proposto em casos clássicos de OETC.

1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

No corrente Capítulo é apresentado o problema de OETC utilizando técnicas de adaptatividade, sua importância e relevância para o desenvolvimento de projetos estruturais. Também são apresentados os objetivos gerais e específicos deste trabalho.

No Capítulo 2 têm-se a base teórica do trabalho, aonde são explanados as teorias e o histórico de estudos sobre otimização topológica estrutural, MEF h-adaptativo, juntamente com trabalhos que relacionem os dois temas citados, e sua aplicação em projetos e análises estruturais.

No Capítulo 3 é realizada uma revisão conceitual sobre o problema de otimização a ser empregado no trabalho.

No Capítulo 4, o estimador de erro e uma nova técnica h-adaptativa isotrópica são descritas. Além disso, é exposta uma forma de avaliação dos erros de discretização considerando a variação das propriedades materiais.

No Capítulo 5 é apresentada uma nova técnica de refino h-anisotrópico com aplicação em problemas de otimização de topologia e problemas elípticos escalares bidimensionais.

No Capítulo 6, as novas técnicas de discretização são testadas e validadas numericamente através de problemas elípticos de segunda ordem.

No Capítulo 7 são expostos os resultados referentes à aplicação de técnicas de refino do tipo h em problemas clássicos de otimização topológica.

No Capítulo 8 são apresentadas as considerações finais acerca desta tese. Na sequência estão listadas as referências bibliográficas que embasam este estudo.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Este Capítulo apresenta uma revisão da literatura dos tópicos de relevância desta tese. São discutidas as teorias e o histórico de estudos sobre otimização estrutural topológica e o MEF h-adaptativo, além de trabalhos envolvendo a solução de problemas de OETC através do controle de malha h-adaptativo.

2.1 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Conforme mencionado, otimização estrutural pode ser uma valiosa ferramenta na concepção de estruturas e componentes mecânicos, podendo ser entendida como uma aplicação de métodos de otimização ao projeto de estruturas (OHSAKI, 2011). Nesse caso, o objetivo é encontrar a configuração que represente a melhor performance da estrutura de acordo com um conjunto de restrições. Esta performance é especificada através de uma ou várias funções, denominadas de funções objetivo. Propriedades mecânicas, como a rigidez ou a máxima frequência natural crítica, e parâmetros relacionados ao custo do projeto, como a massa ou o volume, são exemplos de funções objetivo (PEREIRA, 2001). Além disso, como exemplos de restrições, podem-se citar deslocamentos em pontos específicos da estrutura, massa, volume e tensões admissíveis segundo adequados critérios de falha material.

Com o intuito de expor conceitos e avanços relacionados ao estado da arte desta tese, esta Seção define matematicamente um problema geral de otimização e discute trabalhos realizados no âmbito de OETC.

2.1.1 Definição matemática de um problema geral de otimização

Para descrever conceitos e métodos de otimização é necessária a definição de um formato matemático geral para esses problemas. Deste modo, como apresentado por Arora (2017), o modelo de otimização padrão pode ser expresso na forma:

Encontrar um vetor de variáveis de projeto $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{nvp})$, com nvp sendo o número total de variáveis de projeto, para minimizar um total de nf funções objetivos

$$f_p(\tilde{\mathbf{x}}) = f_p(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{nvp}) \quad (p = 1 \text{ até } nf), \quad (1)$$

sujeito a nh restrições de igualdade,

$$h_j(\tilde{\mathbf{x}}) = h_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{nvp}) = 0 \quad (j = 1 \text{ até } nh), \quad (2)$$

e a ng restrições de desigualdade

$$g_i(\tilde{\mathbf{x}}) = g_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{nvp}) \leq 0 \quad (i = 1 \text{ até } ng). \quad (3)$$

Nesse caso, o conjunto de variáveis de projeto que satisfazem todas as restrições é denominado de conjunto viável. O conjunto inviável é o conjunto de variáveis de projeto que violam pelo menos uma das restrições impostas ao problema.

2.1.2 Otimização estrutural topológica

Problemas de OETC são definidos em um domínio fixo de referência, denominado estrutura-base (*ground structure*), podendo este, ser definido em um segmento unidimensional, no plano ou no espaço (BENDSØE; 1999). Esses problemas têm como objetivo encontrar a distribuição ótima de material em uma estrutura sujeita a um determinado conjunto de cargas e vínculos de modo a minimizar uma ou várias funções objetivo (BENDSØE, 1995).

Otimização topológica de estruturas contínuas é um grande desafio técnico e, ao mesmo tempo, compensadora economicamente. Ao invés de limitar as alterações nas dimensões dos componentes estruturais, proporciona mais liberdade e, frequentemente, permite que o projetista crie algo totalmente inovador e projetos conceituais altamente eficientes. Técnicas de otimização de topologia podem ser aplicadas a estruturas de grande escala, tais como pontes e edifícios, além de ser utilizada também para a concepção de produtos em micro e nano escalas (HUANG; XIE, 2010a).

Muitos autores consideram que o primeiro registro sobre o tema de otimização de topologia foi dado por Michell (1904), onde o autor fundamenta uma teoria sobre a topologia de um domínio observando uma estrutura de treliças como resultado ótimo da minimização de massa. Porém, foi somente com Bendsøe e Kikuchi (1988) que os métodos numéricos para otimização topológica de estruturas contínuas passaram a ser investigados extensivamente. A

maioria destes métodos é baseada na análise pelo MEF. Nos últimos anos, a otimização de topologia tornou-se uma área muito ativa de pesquisa e desenvolvimento. Centenas de publicações surgiram, incluindo uma série de livros, por exemplo, Bendsøe (1995), Hassani e Hinton (1999), Bendsøe e Sigmund (2003), Huang e Xie (2010a) e Novotny e Sokolowski (2013).

Diferentes formulações do problema de otimização estrutural podem ser encontradas na literatura, entre as mais discutidas estão:

- Minimização de flexibilidade com restrição em massa/volume, onde se pode citar os trabalhos de Bendsøe e Kikuchi (1988), Mahdavi et al. (2006), Nguyen et al. (2010), Muñoz e Stolpe (2011), Nguyen et al. (2012), Kang e Wang (2011), Tovar e Khandelwal (2013), Wang et al. (2013), Wang, Kang e He (2014) e Lopes, Santos e Novotny (2015).
- Minimização de massa/volume com restrição em tensão. Exemplos desse tipo de formulação podem ser encontrados nos trabalhos de Duysinx e Bendsøe (1998), Pereira (2001), Fancello e Pereira (2003), Pereira, Fancello e Barcellos (2004), Bruggi (2008), Amstutz, Novotny e Neto (2012), Luo, Wang e Kang (2013) e Emmendoerfer Jr. e Fancello (2014).

Nesse cenário, o processo de otimização busca encontrar a topologia ótima da estrutura através da determinação, em cada ponto, se o material existe (elemento sólido) ou não (elemento vazio). Assim, faz-se necessário o uso de uma implementação de algoritmos de otimização discreta para a resolução de um problema 0-1, o que torna a abordagem instável (COSTA JÚNIOR, 2003). A instabilidade numérica surge das dificuldades relacionadas à aplicação do método, tais como dependência de malha, fenômeno do tabuleiro de xadrez¹ (*checkerboard*), mínimos locais e singularidade no processo de otimização (SIGMUND; PETERSSON, 1998; BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Desejando superar tais adversidades, são propostas diversas técnicas na literatura, como, por exemplo, os métodos baseados no conceito de microestruturas ou métodos de densidade, gradiente topológico, analogia com modelos de remodelação óssea e *level set*. A seguir, tem-se uma breve descrição de cada uma dessas técnicas:

¹ O fenômeno de tabuleiro de xadrez refere-se à formação de padrões similares a um tabuleiro de xadrez, cujo aparecimento pode ocorrer ao longo do processo de otimização topológica conduzido através da aplicação direta de métodos baseados no conceito de microestruturas. Tais padrões são construídos através da alternância entre valores de regiões sólidas e vazias (SIGMUND; PETERSSON, 1998; BENDSØE; SIGMUND, 2003).

i. *Métodos baseados no conceito de microestruturas*

Segundo Hassani e Hinton (1999), nos métodos baseados no conceito de microestruturas, uma função de densidade do material é posta com base na definição de um material compósito. Este material simula um meio poroso, sendo formado por um número infinito de pequenos vazios infinitesimais, os quais se distribuem quase-periodicamente. Dessa forma, a introdução de microestruturas pode ser vista como uma relaxação do problema de otimização. Uma possível classificação para os modelos de microestruturas é dada por Hassani e Hinton (1999):

- Modelos de materiais laminados tipo *rank*: é um modelo material onde cada célula da microestrutura periódica é construída a partir de camadas de diferentes materiais e vazios (HASSANI; HINTON, 1998b, 1999). Por exemplo, os chamados materiais *rank-1* são construídos em alternância de lâminas de materiais sólidos e vazios. Podem-se citar como trabalhos que empregam esse tipo de microestrutura: Bendsøe (1995), Bendsøe e Kikuchi (1988), Duysinx e Bendsøe (1998) e Allaire, Jouve e Maillot (2004).
- Modelos de microcélulas com vazios internos: baseia-se na ideia de inserir vazios internos em microcélulas da microestrutura, de modo a permitir que a densidade do material cubra toda uma gama de valores de zero (vazio) a um (sólido). Por exemplo, o uso de células quadradas com orifícios retangulares centralmente localizados é uma das maneiras mais simples de atingir esse objetivo (HASSANI; HINTON, 1998b). Em contrapartida, orifícios circulares não são desejáveis, pois não podem proporcionar um vazio completo (HASSANI; HINTON, 1999). Uma aplicação do conceito de modelo de microcélulas com vazios internos pode ser visualizada através do trabalho de Gea (1996). No caso da utilização desse modelo material, o problema de otimização é construído de tal forma que os parâmetros geométricos desses microfuros sejam as variáveis de projeto (HASSANI; HINTON, 1999).
- Modelos artificiais ou modelo SIMP: o termo SIMP, do inglês *Solid Isotropic Microstructure with Penalization* (Material Sólido Isotrópico com Penalização), remete a um método numérico que faz uso da penalização de elementos com densidades intermediárias para se aproximar da solução discreta do problema. A ideia original do método SIMP foi proposta por Bendsøe (1989). Vários trabalhos foram desenvolvidos utilizando esse tipo de microestrutura. Podem-se citar:

Bendsøe e Sigmund (1999), Stolpe e Svanberg (2001), Pereira (2001), Rietz (2001), Fancello e Pereira (2003), Pereira, Fancello e Barcellos (2004), Martínez (2005), Le et al. (2010), Kang e Wang (2011), Bruggi e Duysinx (2012), Bruggi e Taliercio (2013), Deaton e Grandhi (2013) e Luo, Wang e Kang (2013). Comparações do método SIMP com outros métodos de soluções de problemas de OETC com aplicações desenvolvidas em *softwares* comerciais são apresentadas por Rozvany (2009).

A caracterização das propriedades mecânicas macroscópicas destes materiais é feita pela teoria da homogeneização, a qual pode ser bem compreendida através dos trabalhos de Hassani e Hinton (1998a, 1998b, 1998c).

ii. *Derivada Topológica*

Outra proposta, com vista à obtenção da solução de um problema de OETC, é dada por meio do conceito de derivada topológica. Segundo Novotny e Sokolowski (2013), a derivada topológica mede a variação ou sensibilidade de um dado funcional de forma decorrente de uma infinitesimal perturbação singular no domínio, tal como a inserção de furos. Esse conceito de derivada topológica para um funcional de forma, segundo Novotny e Sokolowski (2013), foi apresentado por Sokolowski e Zochowski (1999). Em problemas de OETC, a derivada topológica representa a sensibilidade do funcional objetivo e das restrições em relação à existência dessa perturbação do domínio. Muitos trabalhos têm surgido aplicando esse conceito.

Amstutz e Novotny (2010) empregam um algoritmo de otimização topológica em problemas planos com base no conceito de derivada topológica de modo a minimizar uma combinação linear de área e flexibilidade com restrições locais de tensão de von Mises. Através de exemplos clássicos da literatura, a metodologia se mostra efetiva na obtenção de topologias respeitando as restrições. Segundo os autores, uma das vantagens do emprego de derivada topológica é que esta não necessita de nenhum tipo de relaxamento das restrições locais.

Posteriormente, Amstutz, Novotny e Neto (2012) estendem o trabalho de Amstutz e Novotny (2010). Nesse, as restrições locais de tensões são formuladas com base no critério de falha material de Drucker-Prager, tendo como função objetivo o volume da estrutura. Podem-se citar, como trabalhos desenvolvidos utilizando derivada topológica em problemas de OETC, entre outros, Novotny et al. (2003, 2007) e Lopes, Santos e Novotny (2015).

iii. Analogia com modelos de remodelação de tecido ósseo

O tecido ósseo possui a capacidade de modificar sua estrutura interna, através da formação ou perda de tecido ósseo, de acordo com a intensidade dos estímulos mecânicos a que este está exposto (LEMAIRE et al., 2004). Com isso, há uma propensão do módulo de rigidez alterar significativamente de região para região. As teorias que buscam prever esse processo adaptativo são nomeadas modelos biomecânicos de adaptação, dos quais, podem-se citar Jacobs (1994), Jacobs et al. (1997), McNamara e Prendergast (2007), entre outros.

Outros trabalhos exploram a relação existente entre a solução de problemas de otimização de topologia e a analogia com modelos de remodelação óssea. Payten, Ben-Nissan e Mercer (1998) propõem a utilização de uma metodologia de otimização topológica fundamentada no problema de adaptação óssea. São apresentados resultados numéricos envolvendo modelos bi e tridimensionais relativos ao problema de minimização de massa com restrições locais de tensões.

Em relação à remodelação óssea, de modo a prever o comportamento do tecido ósseo de um fêmur humano, Bagge (2000) emprega um algoritmo de otimização topológica, cuja função objetivo é minimizar a flexibilidade da estrutura para uma dada fração de volume e múltiplas condições de carregamento.

Nowak (2006) realiza otimização estrutural baseada na adaptação da superfície de um osso trabecular. Testes numéricos tridimensionais apontam a possibilidade de reproduzir resultados similares aos encontrados por métodos padrões de otimização de topologia.

iv. Level Set

Outra opção na busca por soluções aceitáveis de problemas de OETC é a técnica *level set*. Esta técnica se baseia na representação da fronteira do corpo por meio da curva de nível zero de uma função escalar especificada sobre o domínio de análise. Nesse caso, a minimização de uma dada função objetivo ocorre através da movimentação da fronteira do corpo (EMMENDOERFER JR., 2011).

Um grande número de trabalhos tem sido desenvolvido pela utilização da técnica *level set*. Empregando técnicas adaptativas combinadas com o método *level set*, tem-se o trabalho de Park e Youn (2008). Este busca solucionar problemas de otimização topológica envolvendo minimização de flexibilidade com restrição em volume para estruturas de casca.

Challis (2010) implementa, através do *software* Matlab®, o método de *level set* para minimização de flexibilidade de uma estrutura estaticamente carregada.

Uma ampla revisão dos métodos de *level set* aplicados à otimização estrutural topológica, a qual está além do escopo desta tese, pode ser encontrada nos trabalhos de Emmendoerfer Jr. (2011) e Dijk et al. (2013). Englobando estudos com aplicação em problemas de OETC e considerando restrições locais de tensão, podem-se citar Zhang et al. (2013) e Emmendoerfer Jr. e Fancello (2014, 2016).

Ademais, recentemente, tem-se discutido a utilização da técnica *level set* em conjunto com o Método Estendido dos Elementos Finitos (*eXtended Finite Element Method* – XFEM) (WEI; WANG; XING, 2010; LI; WANG; WEI, 2012; VILLANUEVA; MAUTE, 2014; SHARMA; MAUTE, 2017). Outra alternativa, proposta por Burman et al. (2018), é a combinação do *Cut Finite Element Method* (CutFEM) com a técnica *level set*. Nesse trabalho, a utilização do CutFEM em problemas de otimização topológica não exige o remalhamento frente a atualização do domínio imposta pela técnica *level set*, além de possibilitar a utilização de aproximações de elementos finitos de alta ordem (Burman et al., 2018). A teoria e possíveis aplicações do CutFEM são apresentadas e discutidas nos trabalhos de Burman e Hansbo (2012), Burman et al. (2015) e Hansbo, Larson e Larsson (2017).

A utilização destes métodos pode agregar vantagens, como a obtenção, ainda que para malhas relativamente grosseiras, de soluções topológicas com uma adequada representação do contorno material e avaliação das soluções do problema de valor de contorno associado com precisões aceitáveis (VILLANUEVA; MAUTE, 2014). Porém, a presente tese é voltada para a aplicação e desenvolvimento da técnica SIMP. Tal escolha, é baseada na simplicidade, na vasta aplicabilidade e nos inúmeros trabalhos que utilizam esta técnica. Uma revisão e comparação de diferentes metodologias de otimização topológica é encontrada no trabalho de Sigmund e Maute (2013).

2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS H-ADAPTATIVO

Nas últimas décadas, a utilização de métodos numéricos tornou-se uma ferramenta amplamente utilizada na obtenção de soluções aproximadas para equações diferenciais parciais. Os problemas regidos por estas equações diferenciais, com exceção de alguns casos pontuais, não possuem solução analítica conhecida. Encontram-se entre os principais métodos de aproximação: o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno, o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos Generalizados, o Método de

Trefftz etc.. Este estudo emprega o MEF, o qual é descrito, por exemplo, nos livros de Zienkiewicz e Taylor (2000), Cook et al. (2002), Akin (2005), Reddy (2006), Fish e Belytschko (2007) e Khennane (2013).

2.2.1 Método dos Elementos Finitos

Segundo Reddy (2006), o MEF se baseia na divisão do domínio do problema em subdomínios, denominados elementos finitos, sobre os quais a equação diferencial governante é aproximada utilizando um método variacional. Para problemas da mecânica estrutural, a forma variacional pode ser escrita como (REDDY, 2006; ODEN; REDDY, 2011):

Encontrar a função $u \in \bar{U}(\Omega)$, tal que

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in \bar{V}(\Omega), \quad (4)$$

onde $B(.,.): \bar{U} \times \bar{V} \rightarrow R$ é uma forma bilinear contínua e simétrica, $F(.): \bar{V} \rightarrow R$ é um funcional contínuo e linear e v é uma função de variação genérica e cinematicamente admissível. Neste caso, \bar{U} e \bar{V} são espaços de funções, definidos no domínio de análise $\Omega \subset R^d$ (d representa a dimensão física do problema), e dados, respectivamente, por

$$\bar{U} = \bar{U}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) | u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_D\} \quad (5)$$

e

$$\bar{V} = \bar{V}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) | u = 0 \text{ em } \Gamma_D\}, \quad (6)$$

onde H^1 é o espaço de Hilbert de primeira ordem e Γ_D é o contorno do domínio com condições de contorno de Dirichlet (vínculos) prescritas.

Frisa-se que o problema variacional dado pela Eq. (4) apresenta uma única solução. Este fato é comprovado através do Teorema Generalizado de Lax-Milgram (ODEN; REDDY, 1976) e decorre de características apresentadas pela forma bilinear $B(.,.)$, como continuidade e coercividade.

Considerando um problema variacional em forma aproximada e definido no subespaço de funções de aproximação $U^{MEF} \subset \bar{U}$, obtém-se uma função aproximada via elementos finitos u^{MEF} , que substitui a função u (Eq. (4)). No domínio discretizado, este problema variacional pode ser posto como:

Encontrar $u^{MEF} \in U^{MEF}$, tal que

$$B(u^{MEF}, v^{MEF}) = F(v^{MEF}), \quad \forall v^{MEF} \in V^{MEF}(\Omega) \subset \bar{V}(\Omega), \quad (7)$$

onde, U^{MEF} e V^{MEF} são, respectivamente, os subespaços de funções polinomiais por partes de ordem p , contidos em \bar{U} e \bar{V} .

À união dos elementos finitos dá-se o nome de malha de elementos finitos. Neste caso, um sistema matricial de equações, que relaciona os valores das variáveis nodais e os carregamentos aplicados, é obtido por meio do emprego da forma variacional dada pela Eq. (7) a cada elemento da malha.

Assim, através da adequada superposição desses sistemas, pode-se construir um sistema matricial de equações global. No caso de problemas lineares, este sistema associa, através da matriz de rigidez global (\mathbf{K}), o vetor de variáveis primárias nodais ($\bar{\mathbf{u}}$) e o vetor de carregamentos nodais consistentes (\mathbf{F}) como

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{F}. \quad (8)$$

Por fim, é possível obter um novo sistema de equações envolvendo apenas os valores dos graus de liberdade até então desconhecidos. Este sistema é construído pela aplicação das condições de contorno de Dirichlet ao sistema matricial dado pela Eq. (8). A solução deste resulta na completa definição dos deslocamentos nodais da estrutura.

2.2.2 Estimativas de erro de discretização

Devido à natureza aproximadora do MEF, erros são inevitavelmente introduzidos na solução (AINSWORTH; ODEN, 2000). Segundo Reddy (2006), são três as fontes principais de erros: erros de aproximação de domínio, erros de aritmética finita e quadratura e erros de

aproximação ou discretização. Este trabalho discute, no âmbito de problemas elípticos de segunda ordem e problemas de otimização topológica, a análise e controle dos erros de discretização, ou seja, erros provindos da substituição da solução analítica (obtida através do problema variacional (4)) por uma solução polinomial aproximada (encontrada através da solução do problema variacional aproximado (7)).

Uma correta medida desses erros é de suma importância na avaliação de uma solução obtida por elementos finitos. Através desta, é possível definir a convergência e a aceitabilidade da solução aproximada. Além disso, adequadas estimativas de erros locais permitem, através da aplicação de métodos adaptativos, a redução e controle dos erros de aproximação ao longo do domínio em análise (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992c).

São duas as principais categorias de estimadores de erro em uma solução pelo MEF (AINSWORTH; ODEN, 2000): estimadores de erro *a priori* e estimadores de erro *a posteriori*.

Segundo Ainsworth e Oden (2000), a aplicação de **estimadores de erro *a priori***, permite a obtenção de informações quanto à convergência e estabilidade da solução aproximada. Neste caso, é possível prever o comportamento assintótico dos erros de discretização de acordo com a modificação dos parâmetros da malha. Porém, segundo Grätsch e Bathe (2005), estes estimadores não são projetados para fornecer uma estimativa real dos erros da malha.

Por outro lado, **estimadores de erro *a posteriori***, se baseiam na solução aproximada via MEF para obtenção de estimativas dos erros verdadeiros ao longo da malha de elementos finitos. Estes tiveram início com o trabalho de Babuska e Rheinboldt (1978a) e podem ser divididos em duas principais classes: estimadores baseados em resíduo e estimadores baseados em recuperação.

Podem-se citar Babuska e Rheinboldt (1978b, 1981), Ainsworth e Oden (1997, 2000) como importantes trabalhos com referência aos estimadores de erro baseados em resíduo. Ademais, esta classe de estimadores de erro pode ser dividida em duas subclasses: explícitos (BABUSKA; RHEINBOLDT, 1978a; JOHNSON; HANSBO, 1992; STEWART; HUGHES, 1997, 1998) e implícitos (AINSWORTH; ODEN, 1993a, 1993b, 1993c).

Estimadores de erros baseados em recuperação, os quais são empregados nesta tese, foram introduzidos por Zienkiewicz e Zhu (1987), tendo como base aplicações em problemas de elasticidade plana. Nesse trabalho, os autores mostram a boa precisão desses estimadores na estimativa dos erros locais, fato que possibilita o seu uso em algoritmos adaptativos. A diferença entre a solução aproximada obtida pelo MEF e uma solução recuperada encontrada

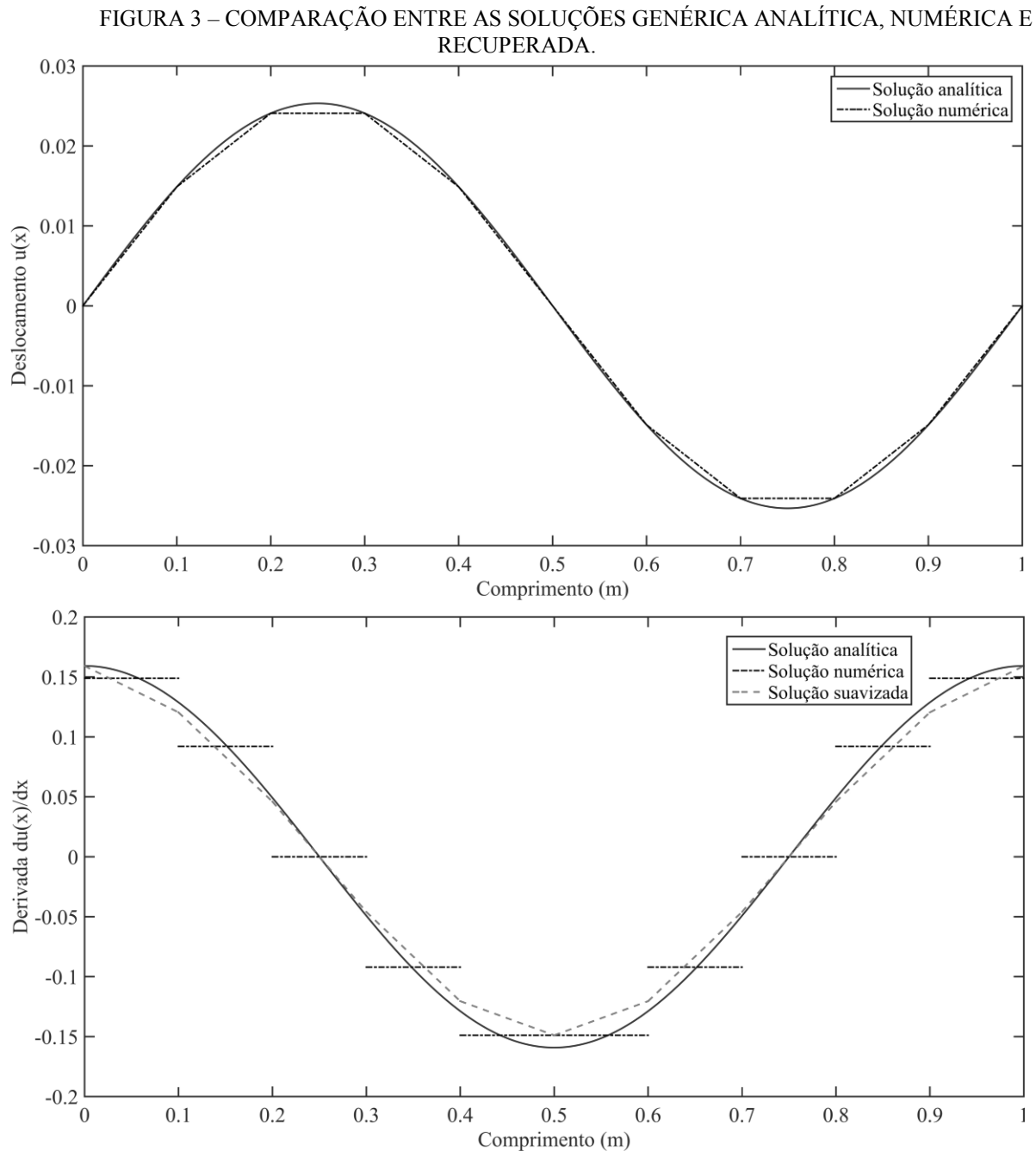
através de diferentes técnicas de recuperação do gradiente, forma a base dos estimadores baseados em recuperação.

Entende-se por solução recuperada, uma solução obtida através do pós-processamento da solução de elementos finitos e que possua uma taxa de convergência acima da encontrada pela solução numérica convencional. Por exemplo, considerando um problema de elasticidade, no qual a solução via MEF fornece a completa definição do vetor nodal de deslocamentos e assumindo que o gradiente da solução deslocamento seja descontínuo entre cada elemento finito da malha, o gradiente recuperado dessa solução será um campo contínuo dado pela interpolação dos valores nodais recuperados (encontrados via diferentes métodos) e as funções de forma utilizadas na obtenção da variável primária do problema (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Uma representação gráfica, de um exemplo da diferença entre as derivadas de uma solução unidimensional analítica, numérica e recuperada, é apresentada na FIGURA 3.

Observando que a qualidade dos estimadores de erro baseados em recuperação depende fortemente da qualidade dos valores recuperados dos gradientes (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992b), na bibliografia são encontrados vários trabalhos que buscam formas de obter valores recuperados mais precisos. Algumas técnicas desenvolvidas são o *Superconvergent Patch Recovery* (SPR) (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992a, 1992b), *Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium* (SPRE) (WIBERG; ABDULWAHAB, 1992), *Superconvergent Patch Recovery Incorporating Equilibrium and Boundary Conditions* (SPREB) (WIBERG; ABDULWAHAB; ZIUKAS, 1994), *Recovery by Equilibrium of Patches* (REP) (BOROOMAND; ZIENKIEWICZ, 1997a, 1997b), *Recovery by Compatibility in Patches* (RCP) (UBERTINI, 2004; BENEDETTI; MIRANDA; UBERTINI, 2006; CASTELLAZZI; MIRANDA; UBERTINI, 2010), *Polynomial Preserving Recovery* (PPR) (ZHANG; NAGA, 2005), *Constrained SPR* (SPR-C) (RÓDENAS et al., 2007) e *The Superconvergent Cluster Recovery Method* (SCR) (HUANG; YI, 2010).

Entre os métodos citados na obtenção dos gradientes recuperados da solução, chama-se atenção para o método SPR. Este, além de simples e robusto, apresenta valores recuperados que conduzem a uma ótima estimativa dos erros locais, com amplas aplicações (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992a, 1992b, 1995; ZIENKIEWICZ; ZHU; WU, 1993; WIBERG; LI, 1994; ZIENKIEWICZ; BOROOMAND; ZHU, 1999; LINS, 2011; SILVA, 2015; GONÇALVES, 2016; PEREIRA; SILVA; GONÇALVES, 2016). Algumas aplicações são em problemas de elasticidade plana, problemas planos de condução térmica, problemas dinâmicos e problemas de flexão de placas. Basicamente, esta técnica busca determinar os

valores recuperados dos gradientes através da aplicação do método dos mínimos quadrados sobre padrões de elementos no entorno de um nó genérico e considerando pontos previamente estabelecidos.



FONTE: O autor (2017).

Cabe ressaltar que, conforme demonstrado por um teorema exposto no trabalho de Zienkiewicz e Zhu (1992b), estimadores de erro baseados em recuperação podem ser considerados assintoticamente exatos. Esta importante característica indica que, à medida que

a malha de elementos finitos é refinada (ou seja, o tamanho dos elementos tende a zero), o estimador de erro fornece medidas que convergem para o erro verdadeiro.

Por outro lado, em geral, tradicionais estimadores baseados em recuperação não possuem um limite superior para a norma do erro em energia. Recentemente, alguns trabalhos têm surgido com o intuito de elaborar metodologias que permitam a obtenção destes limites (DÍEZ; RÓDENAS; ZIENKIEWICZ, 2007; NADAL et al, 2015).

2.2.3 h-adaptatividade em Elementos Finitos

Contanto que estimativas locais dos erros de discretização sejam obtidas através da utilização de estimadores de erros, torna-se viável o emprego de metodologias adaptativas no controle e limitação dos erros ao longo do domínio do problema. Estas metodologias buscam uma solução aceitável por meio da modificação dos parâmetros da malha de elementos finitos. Uma classificação dessas metodologias é apresentada no livro de Zienkiewicz e Taylor (2000):

- i. Método p : consiste em melhorar o espaço de solução elevando o grau das funções de interpolação. Porém, não ocorre nenhuma modificação no tamanho dos elementos da malha. Entre os trabalhos que discutem o método p estão: Novotny e Fancello (1998), Oh e Batra (1999) e Duarte (2003).
- ii. Método h : os elementos procedentes da discretização possuem seus tamanhos alterados, permanecendo inalterável o grau do polinômio empregado.

Esta última pode ser dividida em três diferentes subclasses (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000):

- (a) Subdivisão do elemento (*enrichment*): o contorno dos elementos originais não é alterado e simplesmente ocorre uma divisão dos elementos com um erro superior ao admissível.
- (b) Refino r (*r-refinement*): é caracterizado por posicionar os pontos nodais da malha conforme a distribuição de erros. Frisa-se que o número de nós da malha não é modificado. Alguns trabalhos desenvolvidos envolvendo esta subclasse são: Huerta et al. (1999), Askes e Sluys (2000), Askes e Rodríguez-Ferran (2001), Rajagopal e Sivakumar (2007) e Luo (2010).
- (c) Remalhamento ou geração de malha (*remeshing or mesh generation*): com base em uma malha inicial, os novos tamanhos dos elementos são estimados e uma malha completamente nova é obtida através de um gerador de malhas. Neste

caso, os elementos podem diminuir ou aumentar conforme a severidade da solução e, em geral, o número de nós da malha é alterado.

Outra possível metodologia adaptativa frequentemente encontrada na literatura é o refino hp , o qual, consiste na aplicação simultânea dos métodos h e p . Entre os estudos que analisam esta metodologia híbrida podem-se citar: Zienkiewicz, Zhu e Gong (1989), Babuska, Strouboulis e Copps (1997), Novotny e Fancello (1998) e Novotny et al. (2000).

Neste trabalho é empregada a h-adaptatividade, em especial, aquela obtida através da completa especificação de uma nova malha. No que concerne à aplicação desta técnica, são duas as possibilidades prevaletentes na literatura: h-adaptatividade isotrópica ou anisotrópica. Ambas as metodologias são aqui analisadas e, portanto, um breve histórico sobre os estudos apresentados na bibliografia e relevantes ao desenvolvimento desta tese é exposto a seguir.

2.2.3.1 Estratégias adaptativas h-isotrópicas

O método h-adaptativo isotrópico busca definir, com base em algum critério de malha ótima, o tamanho dos novos elementos, os quais são caracterizados por possuírem razões de aspecto próximas da unidade (HUANG, 2006). Inicialmente, métodos h-adaptativos eram baseados em simplesmente dividir os elementos onde um erro se encontra acima de um erro limite até que se alcançasse uma solução aceitável (ZIENKIEWICZ, 2006). Embora esta abordagem possibilite a redução e controle dos erros de discretização, a mesma está relacionada a um alto custo computacional, o qual é frequentemente mais elevado do que o custo da análise por elementos finitos. Assim, outras técnicas de controle de erros de discretização têm sido desenvolvidas.

Zienkiewicz e Zhu (1987) propõem um método h-adaptativo isotrópico que permite, através do emprego de um gerador de malhas, a geração completa de uma nova malha de elementos finitos. A estimativa do tamanho dos novos elementos é guiada por um estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação. Neste trabalho, as malhas finais possuem como objetivo limitar e distribuir igualmente os erros ao longo do domínio. Este critério, o qual é empregado no presente trabalho, é denominado de critério de equidistribuição do erro elementar. Frisa-se que a escolha de diferentes critérios de malha ótima, em geral, conduzirão a malhas convergentes diferentes. O emprego desta metodologia em problemas de elasticidade plana demonstra a capacidade desta técnica no controle e limitação dos erros de discretização. Este método é aqui denominado de projeção Ch^p , sendo o mesmo utilizado

como solução de referência na comparação com as metodologias adaptativas desenvolvidas nesta tese

Em 1988, através do trabalho de Zhu e Zienkiewicz (1988), a projeção Ch^p foi testada envolvendo a aplicação de elementos finitos triangulares de diferentes graus de interpolação em problemas de elasticidade plana, em especial, para problemas que apresentavam singularidade. Porém, cabe ressaltar que se deve possuir uma boa estimativa da localização e da magnitude das singularidades. Nos exemplos testados, uma maior taxa de convergência é obtida quando comparada com um refino uniforme. Outra característica relevante apontada é que, considerando malhas iniciais diferentes, as malhas finais obtidas apresentam um erro percentual global e um número de graus de liberdade muito próximos, embora a topologia dessas malhas possam sofrer alterações.

A projeção Ch^p foi posteriormente analisada e/ou utilizada em várias aplicações, como, por exemplo, problemas de elasticidade plana (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1991; DÍEZ; HUERTA, 1999; CASTELLAZZI; MIRANDA; UBERTINI, 2010), problemas planos de condução térmica (ZIENKIEWICZ; BOROOMAND; ZHU, 1999; SILVA, 2015; PEREIRA; SILVA; GONÇALVES, 2016), problemas dinâmicos (WIBERG; ABDULWAHAB; LI, 1997), problema de flexão de viga de Euler-Bernoulli (SILVA, 2015), problemas de flexão de placas (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1989), problemas de escoamento de fluidos incompressíveis (WU et al., 1990) e problemas de OETC (GONÇALVES, 2016).

Segundo Oñate e Bugeda (1993), em 1990 um novo critério de malha ótima é introduzido por Bugeda (1990). Este critério é denominado de equidistribuição do erro específico elementar ou critério da uniformidade da densidade do erro. Neste caso, diferentemente do critério apresentado por Zienkiewicz e Zhu (1987), este assume que o erro específico deve ser igualmente distribuído ao longo da malha. Entende-se por erro específico a razão do quadrado do erro por unidade de área.

Utilizando o conceito fundamental exposto pela projeção Ch^p e um estimador de erro baseado em recuperação (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987), Oñate e Bugeda (1993) comparam o critério da uniformidade da densidade do erro com o critério de equidistribuição do erro elementar. Nesse trabalho, fica evidenciado que o critério de equidistribuição do erro específico elementar, em geral, apresenta um maior número de elementos em regiões com altas variações da solução. Ambos os critérios são também discutidos no trabalho de Silva (2015) por meio da aplicação em problemas lineares de engenharia considerando diversas

técnicas de recuperação de gradiente e aproximações lineares e quadráticas de elementos finitos triangulares.

Em 1995, uma nova técnica h-adaptativa é proposta e discutida nos trabalhos de Li e Bettess (1995) e Li et al. (1995). Esta, aqui denominada de técnica LB, pode ser considerada como um avanço da técnica Ch^p . A técnica LB consiste em determinar a dimensão dos novos elementos através de uma expressão matemática baseada na convergência assintótica dos erros aplicada a nível elementar e em uma estimativa do número de elementos da malha adaptada. Li e Bettess (1995) discutem condições para a definição de um adequado critério de malha ótima e provam matematicamente que os erros nos elementos de uma malha adaptada devem ser idênticos. Tal fato corrobora com a definição de malha ótima apresentada por Zienkiewicz e Zhu (1987). Ademais, exemplos numéricos de problemas de flexão de placas baseados na teoria de Reissner-Mindlin mostram que a técnica LB possui, em geral, melhores taxas de convergência que a técnica Ch^p , conduzindo a malhas com um menor número de elementos.

Díez e Huerta (1999) propõem uma técnica h-adaptativa fundamentada em uma abordagem unificada e em estimativas de erro *a priori*. Esta técnica, denominada de *Uniform Local Accuracy* (ULA), é comparada com diversas metodologias de refino considerando problemas de elasticidade. A técnica ULA consiste na definição de um critério de malha ótima que considera simultaneamente valores prescritos de erro relativo global e local. Nesse caso, dependendo dos valores selecionados para os parâmetros de convergência da técnica, dois casos particulares podem ser obtidos: o proposto pela técnica LB e o discutido por Oñate e Bugada (1993).

Outra metodologia h-isotrópica, recentemente proposta, é descrita nos trabalhos de Pereira, Silva e Gonçalves (2016) e Gonçalves (2016). Esta, denominada de *Quadratic Error Recovery* (QER), fundamenta-se na aplicação conjunta dos conceitos de norma do erro em energia, recuperação quadrática da função densidade do erro em energia e a solução de um problema de otimização pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange. Nesses trabalhos, os autores aplicam o critério de equidistribuição do erro. Vários aspectos e aplicações desta técnica são analisados e discutidos, como, por exemplo, a aplicação em problemas escalares (PEREIRA; SILVA; GONÇALVES, 2016) e em problemas de OETC (GONÇALVES, 2016). Cabe ressaltar que, em geral, são encontradas melhores taxas de convergência quando comparadas com a projeção Ch^p (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987). Porém, a aplicação da

técnica QER é posta somente em termos de uma aproximação linear de elementos finitos triangulares.

Uma alternativa de adaptação de malha encontrada na literatura, que difere das propostas desta tese, são as denominadas adaptações de malha *a priori* (FRANÇOIS; CUILLIÈRE, 2000; CUILLIÈRE; FRANÇOIS; LACROIX, 2016; CUILLIÈRE; FRANÇOIS, 2017). Esta classe de métodos propõem encontrar soluções de elementos finitos, baseando-se em uma malha adaptada definida, por exemplo, de acordo com as condições de contorno, carregamentos, propriedades materiais e erros de geometria. Aplicações deste tipo de discretização são geralmente conduzidas em fases iniciais do projeto ou para acelerar a convergência de técnicas h-adaptativas conduzidas de acordo com a análise dos erros de discretização (adaptação de malha *a posteriori*) (CUILLIÈRE; FRANÇOIS; LACROIX, 2016). Além disso, a adaptação de malhas *a priori* pode ser utilizada como uma opção a adaptação *a posteriori* em regiões onde as informações locais dos estimadores de erros podem não ser precisas (por exemplo, regiões de concentrações de tensão em problemas de elasticidade) (CUILLIÈRE; FRANÇOIS; LACROIX, 2016; CUILLIÈRE; FRANÇOIS, 2017).

2.2.3.2 Estratégias adaptativas h-anisotrópicas

Diante de problemas físicos que possuem uma solução com um comportamento anisotrópico, ou seja, uma solução que varia mais rapidamente em uma direção do que em outra, a discretização através de malhas anisotrópicas se mostra mais eficiente do que através de malhas isotrópicas (HUANG, 2005; CAO, 2014). Isto, em função principalmente, da acentuada redução do número de graus de liberdade proporcionada por malhas orientadas (PICASSO, 2003b). Neste caso, a completa especificação dos parâmetros da nova malha faz-se mediante a definição da forma, tamanho e orientação dos novos elementos (HUANG, 2005).

Muitos trabalhos buscam representar esses parâmetros através da definição de um tensor métrico ou métrica (BUSCAGLIA; DARI, 1997; CASTRO-DÍAZ et al., 1997; BOROUCAKI et al., 1997; HUANG, 2005, 2006; CAO, 2007; HUANG; LI, 2010; XIE; YIN, 2014; CAO, 2014, 2015). Este tensor é representado por uma matriz simétrica e positivo-definida (BOROUCAKI et al., 1997; GEORGE; BOROUCAKI, 1998), provinda geralmente da recuperação da matriz Hessiana de uma dada solução de elementos finitos (CASTRO-DÍAZ et al., 1997; BORGES et al., 1998; HUANG, 2005, 2006).

Através da definição de um tensor métrico para cada nó da malha corrente, pode-se obter, por meio da aplicação de um adequado gerador de malhas, uma nova malha de elementos finitos, seja ela isotrópica ou anisotrópica, de acordo com um critério previamente estabelecido. Quanto à geração de malhas anisotrópicas bidimensionais, dois geradores têm sido largamente aplicados na literatura, sejam eles: o BAMG (*Bidimensional Anisotropic Mesh Generator*) e o BL2D. O primeiro, o qual é empregado na geração de malhas desta tese, foi introduzido por Hetch (1998, 2006, 2012) e aplicado, por exemplo, nos trabalhos de Cao (2007), Huang (2005), Micheletti e Perotto (2006), Huang, Kamenski e Lang (2010), Huang e Li (2010), Hetmaniuk e Knupp (2011), Porta, Perotto e Ballio (2012), Cao (2014, 2015) e Pereira e Silva (2017). O segundo foi inicialmente desenvolvido por Laug e Bourochaki (1996) e, posteriormente, teve o desenvolvimento de sua segunda versão (LAUG; BOUROCHAKI, 2003), sendo utilizado em vários estudos (PICASSO, 2003a, 2003b, 2006; PICASSO et al., 2011).

Outra alternativa para a geração adaptativa de malhas de elementos finitos triangulares em domínios planos é a utilização da estrutura ARANHA++, a qual foi desenvolvida por Fancello, Guimarães e Feijóo (1990). Esta permite a geração de malhas isotrópicas e anisotrópicas, sendo fundamentada no conceito de técnicas não estruturadas frontais. Neste caso, a malha de parâmetros não necessita da definição de um tensor métrico e é especificada através da definição de três variáveis, sejam elas: tamanho médio do elemento, fator de estiramento e ângulo de aplicação do estiramento. A estrutura ARANHA++ é empregada em vários trabalhos, por exemplo, Costa (1999), Pereira (2001) e Silva (2015).

Em h-adaptatividade anisotrópica, um dos principais desafios é o desenvolvimento de estimadores de erro eficientes e que tenham a capacidade de conduzir a uma malha de elementos finitos orientada com as direções principais do erro. Desse modo, são vários os trabalhos que buscam desenvolver e avaliar estimadores de erro *a posteriori* ao longo das últimas décadas (SIEBERT, 1996; KUNERT, 1999; MICHELETTI; PEROTTO, 2006; PICASSO, 2003b; KUNERT; NICAISE, 2003; FORMAGGIA; PEROTTO, 2003; PICASSO, 2006; HUANG; KAMENSKI; LANG, 2010; MICHELETTI; PEROTTO; FARRELL, 2010; CAO, 2014, 2015). A seguir são discutidos os trabalhos de maior relevância para esta tese no que se refere a técnicas h-adaptativas anisotrópicas. Em especial, cita-se aqueles que buscam explorar as características de estimadores baseados em recuperação e são aplicados a processos de geração de malhas anisotrópicas.

Utilizando um estimador de erro direcional baseado na recuperação de segunda ordem das derivadas da solução de elementos finitos, Borges et al. (1998) propõem um

modelo de processo h-adaptativo anisotrópico, que tem como objetivo distribuir o erro uniformemente ao longo do domínio. Neste caso, ao longo do processo de adaptatividade da malha, a mesma tende a ficar alinhada com a direção de máxima curvatura da função. Os autores aplicam esse processo a problemas de análise limite, o qual se mostra apropriado para capturar descontinuidades ao longo do domínio.

Picasso (2003a) propõe, com foco no problema de Laplace e considerando uma aproximação linear de elementos finitos, um novo indicador de erro anisotrópico baseado na norma em energia. Este indicador obtém as direções principais do erro através de uma matriz construída com base nos conceitos definidos pelo clássico estimador ZZ. Os valores de gradiente recuperado são encontrados por um processo de média nodal ponderada pela área. Através das informações desse indicador, um processo h-adaptativo anisotrópico na busca por um erro relativo admissível mostra-se viável. Testes numéricos, comparando os índices de efetividade² obtidos pelo estimador isotrópico ZZ e pelo novo indicador de erro anisotrópico, indicam que estimativas obtidas pelo estimador ZZ são assintoticamente exatas mesmo para malhas altamente distorcidas (razões de aspecto máximas próximas a 400). O indicador anisotrópico mostra-se independente das razões de aspecto, apresentando índices de efetividade, em geral, entre dois e três. Uma explicação teórica para o bom comportamento do estimador ZZ para malhas anisotrópicas não é apresentada pelo autor.

No trabalho de Picasso (2003b), o indicador proposto no trabalho de Picasso (2003a) é estendido para problemas elípticos e parabólicos. Considerando os problemas elípticos descritos no estudo, resultados numéricos evidenciam que, para uma malha regular de elementos triangulares com uma razão de aspecto de 1:16, o estimador ZZ possui um índice de efetividade próximo a 1 e o indicador de erro anisotrópico próximo a 2,7. Com um aumento da razão de aspecto até 1:512, não é percebida nenhuma alteração significativa nos índices de efetividade. Porém, para razões de aspecto mais elevadas (até a ordem de 1:4096) o indicador de erro anisotrópico apresenta um crescimento do índice de efetividade, enquanto o estimador de erro ZZ apresenta uma estimativa assintoticamente exata. Ademais, com base no indicador de erro anisotrópico, uma estratégia adaptativa é testada. O objetivo é equidistribuir os erros locais avaliados pelo indicador proposto nas direções de máximo e mínimo esticamentos. Esta metodologia apresenta significativas reduções do número de elementos

² Índice de efetividade é uma medida que auxilia na avaliação da qualidade de estimadores de erro. Este índice é definido pela razão entre o erro de discretização estimado e o erro de discretização analítico (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987, 1992b).

quando comparada com uma estratégia adaptativa isotrópica. Entretanto, um grande número de iterações (cerca de 30 iterações) é necessário para satisfazer os critérios de convergência.

No trabalho de Micheletti e Perotto (2006), é proposto um estimador de erro a *posteriori* anisotrópico para o problema de Poisson empregando uma discretização de elementos finitos triangulares. Este estimador se baseia na junção de conceitos apresentados por estimadores baseados em resíduos e em recuperação, sendo empregado de modo a guiar um processo h-adaptativo anisotrópico na busca por uma precisão pré-estabelecida. Este processo demonstra um correto alinhamento da malha adaptada de acordo com as características direcionais das soluções. As estimativas dos erros encontradas pelo método proposto são comparadas com as estimativas proporcionadas por estimadores isotrópicos baseados em recuperação (ZZ) (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987, 1992a, 1992b) e resíduo. Os resultados encontrados apontam que índices de efetividade próximos da unidade são encontrados para o estimador ZZ considerando fatores de esticamento máximos de até 800. Por outro lado, o brusco desalinhamento da malha com os valores de maiores gradientes da solução ou fatores de esticamento extremamente elevados, podem causar a subestimação dos erros segundo o estimador ZZ.

Cao (2014) realiza uma análise da superconvergência de técnicas de recuperação do gradiente aplicadas a elementos finitos lineares e empregadas para conduzir refinamentos de malha anisotrópicos em problemas planos. Entre estas técnicas estão: a média ponderada local, a projeção L_2 local e o ajuste por mínimos quadrados. Nesse trabalho, prova-se que as três técnicas de recuperação citadas produzem gradientes superconvergentes se as malhas são quase-uniformes segundo uma dada métrica e cada par de elementos adjacentes na malha formam aproximadamente um paralelogramo. Assim, respeitadas essas premissas, estes estimadores podem ser considerados assintoticamente exatos. Estes resultados provêm justificativas teóricas para a extraordinária robustez e exatidão observadas em inúmeras aplicações para estimadores de erro baseados em recuperação em malhas anisotrópicas, como, por exemplo, as descritas por Picasso (2003a, 2003b) e Micheletti e Perotto (2006). Outros trabalhos que corroboram com estes resultados são dados em Picasso et al. (2011) e Farrell, Micheletti e Perotto (2011) e Cao (2015), onde nos dois primeiros são apresentadas aplicações tridimensionais.

Recentemente, uma nova metodologia h-anisotrópica, denominada de *Anisotropic Error Density Recovery* (AEDR), foi introduzida por Pereira e Silva (2017). Esta é ancorada nos conceitos do clássico estimador de erro ZZ (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987, 1992a, 1992b),

aplicado inicialmente para malhas isotrópicas, e discutido no âmbito de problemas anisotrópicos em diversos trabalhos (PICASSO, 2003a, 2003b; MICHELETTI; PEROTTO, 2006; CAO, 2014, 2015). Além disso, a técnica AEDR pode ser considerada como uma extensão da técnica isotrópica *Quadratic Error Recovery* (QER) (PEREIRA; SILVA; GONÇALVES, 2016; GONÇALVES, 2016). Neste caso, dada uma aproximação linear de elementos finitos triangulares, a metodologia AEDR se baseia na recuperação quadrática da função densidade do erro em energia em conjunto com a solução de um problema de otimização via Método dos Multiplicadores de Lagrange. Deste modo, é obtida uma expressão analítica para determinação dos parâmetros anisotrópicos associados à malha adaptada. Os autores apresentam resultados numéricos comprovando a eficiência da nova técnica quando comparada com projeções isotrópicas.

Por fim, um importante aspecto no processo de geração de uma malha anisotrópica abordado pela metodologia AEDR (a qual, calcula os parâmetros anisotrópicos em cada elemento finito) é a obtenção da malha de parâmetros definida com base na posição dos nós da malha inicial. Estas informações são obtidas através de um processo denominado de intersecção de métricas. Alguns modelos de intersecção de métricas são encontrados na bibliografia (BOROUCHAKI et al., 1997; CASTRO-DÍAZ et al., 1997; LAUG; BOROUCHAKI, 2015; DOMPIERRE et al., 2017).

2.3 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA CONTÍNUA E ADAPTATIVIDADE DE MALHA

Em otimização topológica, geralmente os problemas são resolvidos através de uma malha uniforme fixa com um número relativamente grande de elementos, com o objetivo de obter a precisão desejada na solução (STURLER; PAULINO; WANG, 2008).

Porém, como no decorrer do processo iterativo de otimização o domínio sofre diversas modificações em sua topologia, a malha inicialmente gerada pode não ser a ideal. Nesse contexto, frequentemente, regiões com reduzidos gradientes (por exemplo, gradientes de tensões) utilizam elementos menores do que efetivamente necessitariam para obter um erro aceitável. Por outro lado, regiões com elevados gradientes, que precisam detectar variações bruscas nas variáveis em análise, não são refinadas o bastante. Um exemplo são problemas com concentração de tensões, os quais geralmente exigem malhas com refino gradual. Dessa maneira, além da precisão esperada não estar garantida, muitas vezes se tem um custo computacional elevado.

De forma a suprir tais dificuldades e incertezas, a h-adaptatividade de malha mostra-se uma opção a ser utilizada em problemas de otimização topológica. Esse mecanismo propõe-se a uniformizar o erro por toda a malha com base em estimadores de erros adequados, os quais indicam quais regiões devem ou não ser refinadas.

Maute e Ramm (1995) aplicam técnicas h-adaptativas em otimização topológica contínua de estruturas bidimensionais, tendo como foco o problema de minimização de flexibilidade. Nesse trabalho, os autores separam o modelo de variáveis de projeto do modelo de elementos finitos. O reconhecimento do contorno da estrutura ocorre através de isolinhas de densidades. Regiões com valores de densidades inferiores a um valor especificado são consideradas como vazios e podem ser negligenciadas no modelo de análise. Os resultados numéricos evidenciam uma redução significativa no número de variáveis de projeto e uma melhor definição do contorno material.

Através do trabalho de Maute, Schwarz e Ramm (1998), os autores aliam adaptatividade e otimização de topologia de modo a solucionar o problema de maximização de ductilidade para estruturas elastoplásticas. A massa no espaço de projeto é prescrita e as variáveis de projeto são as densidades no interior de cada elemento. O processo adaptativo é análogo ao apresentado por Maute e Ramm (1995). Este processo pode evitar a formação de bordas irregulares e diminuir o número de variáveis de projeto.

Novotny (1998) apresenta uma metodologia que une uma técnica de refino de malha do tipo h-isotrópico à solução de problemas de OETC, de modo a obter uma melhor definição da interface material-vazio que aquela decorrente da utilização de malhas uniformes. Nesse trabalho, o problema de OETC tem como objetivo minimizar a massa da estrutura, a qual está sujeita a restrições de falha material por plastificação fundamentadas no critério de von Mises. A identificação dos contornos materiais e a determinação dos novos parâmetros do elemento são baseadas nos conceitos associados a estimadores de erro e adaptatividade de malha apresentadas no trabalho de Zienkiewicz e Zhu (1987).

Aplicado também a problemas bidimensionais de minimização de flexibilidade com restrição em volume, Costa Júnior e Alves (2003) implementam um novo procedimento de refino de malha utilizando métodos h-adaptativos. Observa-se, através desse processo, que a cada refino da malha a solução converge para a topologia final ótima, com contornos cada vez mais definidos. Por outro lado, há uma forte dependência da topologia ótima em relação à malha inicial de elementos finitos gerada, já que o número de refinamentos é delimitado *a priori*, tendo como base o tamanho do menor elemento da malha anterior.

Stainko (2006b) apresenta um algoritmo para resolução de problemas de mínima flexibilidade bidimensional e tridimensional com restrição em volume utilizando técnicas adaptativas. O processo é realizado através de uma sequência de iterações, onde somente regiões de interface entre material e vazio são refinadas.

Seguindo uma abordagem diferente, Silva (2007) propôs um processo de otimização para estruturas bidimensionais submetidas a determinadas condições de carregamentos mecânico e térmico. Nesse processo, é combinado o esquema de otimização topológica com refino h-adaptativo, tendo como função objetivo a minimização de massa sujeita a um critério adaptado da tensão efetiva de von Mises com restrições laterais e de estabilidade na distribuição de densidade. Embora a metodologia proposta pelo autor ocasione um custo computacional elevado, exemplos numéricos apresentaram uma considerável definição do contorno material, deixando evidente que a resolução final do contorno do material e uma melhor caracterização do estado de tensão estão diretamente ligadas ao tamanho médio do elemento finito empregado. Essa estratégia possibilita o refino em regiões com elevado erro, porém não possibilita o desrefino em regiões de baixo erro.

James, Hansen e Martins (2009) propõem, a partir da obtenção de uma topologia convergente, a subdivisão de elementos sólidos e de interface material-vazio até a obtenção de uma topologia suficientemente suave em problemas sujeitos a múltiplos casos de carregamentos.

Novamente com foco no problema de minimização de flexibilidade com restrição em volume, Bruggi e Verani (2011) aplicam elementos finitos h-adaptativos em um processo dirigido por dois estimadores de erros, um relativo à descrição do erro da topologia ótima (erro de geometria) e outro com referência aos erros de aproximação do funcional flexibilidade. O algoritmo possibilita o refino ou desrefino da malha através, respectivamente, da subdivisão ou supressão de arestas. Os resultados obtidos através de exemplos numéricos exibem topologias em concordância com as obtidas com malhas finas uniformes, com uma redução significativa das variáveis de projeto.

Alguns estudos relacionados à aplicação de adaptatividade em problemas de OETC utilizam diferentes discretizações para o campo de variáveis de projeto e a análise de elementos finitos (MAUTE; RAMM, 1995; RAMM, MAUTE E SCHWARZ 1998; WANG; KANG; HE, 2013; WANG et al., 2013).

Por exemplo, no trabalho de Guest e Genut (2010), problemas de OETC são resolvidos dissociando o campo de variáveis de projeto da malha de elementos finitos através do método de projeção Heaviside. A solução dos problemas de otimização é realizada por

algoritmos genéticos. Nesse caso, para problemas com um número elevado de restrições locais, o custo computacional obtido por esta metodologia é menor do que a obtida por um campo de variáveis de projeto fixo.

No trabalho de Nguyen et al. (2012), é desenvolvido um método denominado de *Adaptive Multiresolution Topology Optimization* (AMTOP). Nesse, ocorre a discretização independente de elementos finitos, variáveis de projeto e densidades. Exemplos numéricos de OETC aplicados a problemas bidimensionais e tridimensionais comprovam a obtenção de contornos suaves com um baixo custo computacional.

Wang, Kang e He (2013) corroboram com a ideia de uma análise separada do campo de variáveis de projeto e a análise por elementos finitos. Com foco em problemas planos de OETC, cuja função objetivo é a mínima flexibilidade da estrutura com restrição no volume material, é empregada uma metodologia adaptativa ao campo de densidades material. A técnica proposta tende a concentrar um maior número de pontos nodais relativos às variáveis de projeto em regiões de transição material. Exemplos numéricos são conduzidos e, a partir de uma malha de elementos finitos fixa e relativamente fina, é obtido um aumento significativo na resolução do contorno material. Uma das possíveis desvantagens desta metodologia, como apontada pelos próprios autores, é que manter a malha de elementos finitos fixa impossibilita o controle dos erros de discretização. Este fato pode ser indesejável, por exemplo, em problemas de OETC considerando restrições locais em tensões.

Wang, Kang e He (2014) propõem uma técnica h-adaptativa de solução de problemas de OETC com base na definição independente de campos de deslocamentos e de densidades. Nesse caso, em regiões em torno de pontos de cargas concentradas e restrições de deslocamentos, é empregado um refino de malha de forma a minimizar os erros em energia e garantir a convergência da solução. A estimativa destes erros é realizada através de um estimador de erro a posteriori baseado em recuperação (ZHU; ZIENKIEWICZ, 1988). Em contrapartida, o número de variáveis de projeto é modificado seguindo um indicador de erro baseado na variação do campo de densidades. Em geral, há um aumento do número desses pontos ao longo das interfaces material-vazio. Por meio da aplicação dessa estratégia adaptativa em problemas bidimensionais de OETC, cuja função objetivo é a minimização da flexibilidade da estrutura com restrição no volume material, os autores obtêm uma redução dos erros em energia e um aumento na definição do contorno material, quando comparado com uma malha fina e uniforme.

Também utilizando diferentes malhas para a discretização de elementos finitos e para o campo de variáveis de projeto, Lambe e Czekanski (2017) aplicam um refinamento de

malha adaptativo com o objetivo de encontrar um preciso contorno material. O indicador de refino proposto depende da distribuição das propriedades materiais e de uma medida do tamanho dos elementos. Os erros provindos da discretização de elementos finitos não são considerados.

De modo a obter uma interface material-vazio com uma alta resolução, Duan, Li e Qin (2015) utilizam um algoritmo adaptativo em problemas de otimização topológica relacionados a escoamento de fluidos. A definição dos elementos que sofrem refino é caracterizada por um indicador baseado em informações da distribuição material.

Nana, Cullière e François (2016) propõem um processo h-adaptativo para problemas tridimensionais de OETC considerando uma discretização de elementos tetraédricos. O algoritmo introduzido tem como objetivo melhorar a definição do contorno material com um custo computacional reduzido. Para tal, emprega simultaneamente o refinamento da malha em regiões de interface material e o desrefinamento em regiões com elementos sólidos e vazios. O processo de otimização é fundamentado em uma microestrutura SIMP e a identificação do contorno material é realizado através do gradiente de um campo de densidades recuperado. A modificação do tamanho dos elementos é definida de acordo com uma função dimensional (*sizing function*) que decresce com o aumento dos valores do gradiente das propriedades materiais.

Recentemente, Gonçalves (2016) aplica uma metodologia h-adaptativa isotrópica (QER) a problemas de OETC considerando minimização de flexibilidade com restrição em massa. Esta metodologia, quando comparada com a topologia obtida por uma malha uniforme, possibilita o controle dos erros de discretização e uma melhor definição da interface material-vazio. A estimativa dos erros é realizada através de um estimador de erro baseado em recuperação (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992a, 1992b), sendo a geração da malha adaptada feita pelo *software* BAMG (HETCH, 1998, 2006, 2012).

Empregando uma discretização inicial de elementos poligonais, Nguyen-Xuan (2017) apresenta uma técnica h-adaptativa aplicada a problemas de OETC considerando mínima flexibilidade e restrição em volume. Nesta, a modificação do tamanho dos elementos a partir de subdivisão dos mesmos possibilita a obtenção de uma topologia mais suave que a obtida por uma malha uniforme fina.

Neste ponto, cabe ressaltar que os artigos mencionados anteriormente nesta Seção, consideram uma adaptação de malha isotrópica, seja ela aplicada ao campo de densidades ou à discretização de elementos finitos. No que diz respeito ao conhecimento deste autor, existem

poucos trabalhos envolvendo h-adaptatividade anisotrópica aplicada a problemas de OETC (JENSEN, 2016a, 2016b, 2017).

Jensen (2016a) propõe solucionar problemas de OETC bidimensionais com restrições locais de tensão através do Método das Assíntotas Móveis (SVANBERG, 1987) em combinação com adaptação de malha anisotrópica. Neste, um campo de métricas é construído utilizando os conceitos abordados por Chen, Sun e Xu (2007). A construção da malha de parâmetros é realizada através do processo de intersecção de métricas exposto no trabalho de Pain et al. (2001). Os resultados numéricos apontam que a utilização de malhas anisotrópicas em problemas de otimização pode auxiliar em uma distribuição eficiente dos graus de liberdade, porém, aumenta a dificuldade da implementação dos algoritmos. Nos exemplos utilizados fica evidente a tendência da malha em orientar os elementos de acordo com a solução topológica. Em geral, a menor dimensão dos elementos coincide com a direção normal ao contorno gerado pelo campo de densidades.

Jensen (2016b) apresenta um processo h-adaptativo anisotrópico análogo ao utilizado por Jensen (2016a) e aplicado para problemas tridimensionais com o objetivo de minimizar a flexibilidade da estrutura sujeita a restrição sobre o volume material. Para a classe de problemas em análise, estima-se um ganho de aproximadamente 50 vezes no custo computacional ao se utilizar malhas anisotrópicas ao invés de malhas isotrópicas. Outro trabalho desenvolvido pelo autor (JENSEN, 2017) discute a implementação de um algoritmo em Matlab®, considerando soluções de problemas de OETC de mínima flexibilidade bi e tridimensionais e utilizando adaptação de malha anisotrópica.

2.4 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO PROPOSTO

De modo geral, através dos trabalhos descritos anteriormente, evidencia-se que o tema de otimização topológica contínua envolvendo adaptatividade é pouco explorado. Porém, nos estudos já realizados, são apontadas inúmeras vantagens importantes em relação à solução de problemas de OETC por meio de malhas uniformes ou quase uniformes. Dentre estas estão: (a) uma melhora significativa na definição do contorno material, (b) a busca pelo controle, equidistribuição e limitação dos erros de discretização ao longo do domínio e (c) diminuição do número de variáveis de projeto.

Neste contexto, o presente trabalho visa obter um esquema eficiente na concepção de componentes mecânicos empregando ao processo de OETC o MEF h-adaptativo. Para tal,

frente ao atual estado da arte, considera-se como as principais contribuições da presente tese as listadas a seguir:

- i.* Proposta e validação de uma nova técnica h-adaptativa isotrópica fundamentada nos conceitos básicos elencados pela técnica QER (GONÇALVES, 2016; PEREIRA et al., 2016) e considerando problemas elípticos lineares de segunda ordem.
- ii.* Desenvolvimento e validação de uma nova técnica h-adaptativa anisotrópica baseada em um indicador de erro anisotrópico *a posteriori*, posto em termos da recuperação de derivadas de primeira ordem, e da solução analítica de um problema de otimização.
- iii.* Adequação do clássico estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987; 1992a, 1992b) para considerar a rápida variação das propriedades materiais em problemas de OETC.
- iv.* Extensão das técnicas propostas de refino isotrópico e anisotrópico para problemas de OETC considerando abrupta variação de propriedades em microestrutura SIMP.

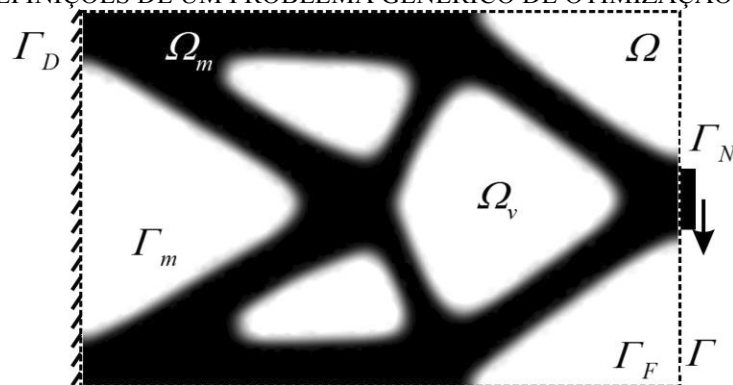
3 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA CONTÍNUA DE MÍNIMA FLEXIBILIDADE E RESTRIÇÃO SOBRE O VOLUME MATERIAL

Este Capítulo apresenta o equacionamento matemático para o problema de OETC considerado na corrente tese. Tal problema busca encontrar a topologia de um componente mecânico de forma que esta forneça a mínima flexibilidade e que o volume não supere um valor prescrito. Cabe ressaltar que a metodologia aqui exposta é descrita de forma resumida por Silva e Pereira (2017).

3.1 DEFINIÇÃO GENÉRICA DE UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Considera-se, aqui, que **as equações diferenciais de equilíbrio são referentes a problemas de elasticidade linear**, onde um corpo de domínio Ω é sujeito a um carregamento distribuído externo de superfície \bar{t} e deslocamentos \bar{u} conhecidos nos seus contornos (FIGURA 4). É designado também que a parcela do domínio ocupada por material é Ω_m e a parcela de vazios é Ω_v , sendo Γ_m a fronteira entre ambos. Além disso, o contorno do domínio Ω é denotado por Γ , a parcela do contorno do domínio onde as condições de contorno de Neumann são não-homogêneas por Γ_N e homogêneas por Γ_F e a parcela do contorno do domínio onde tem-se condições de Dirichlet prescritas por Γ_D .

FIGURA 4 – DEFINIÇÕES DE UM PROBLEMA GENÉRICO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.



FONTE: Silva e Pereira (2017).

Se u , $\varepsilon(u)$ e $\sigma(u)$ são, respectivamente, os campos de deslocamentos, deformações e tensões e D_0 é o tensor de rigidez constitutiva do material sem porosidade

(neste caso, um material isotrópico e elástico), é obtido o conjunto de equações que caracterizam o problema de valor de contorno em discussão:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \subset (\Gamma_m \cap \Gamma), \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_F := \Gamma_m \setminus (\Gamma_N \cup \Gamma_D), \quad (11)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \subset (\Gamma_m \cap \Gamma). \quad (12)$$

A avaliação do campo de tensões é realizada através da relação constitutiva material considerando pequenos deslocamentos, \mathbf{u} , e deformações, $\boldsymbol{\varepsilon}$, dada por

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{D}_0 \nabla^S \mathbf{u}, \quad (13)$$

onde $\nabla^S(\cdot)$ é o operador gradiente simétrico. A forma variacional do problema em análise pode ser posta como:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } \mathbf{u}(x, y) \in H(\Omega) \text{ que satisfaz} \\ &B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\Omega), \end{aligned} \quad (14)$$

onde \mathbf{v} é uma função vetorial de variação cinematicamente admissível, $B(\cdot, \cdot)$ é a forma bilinear contínua associada ao problema e definida em $H \times H_0$ como

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\nabla^S \mathbf{v})^T \mathbf{D}_\rho(\rho) \nabla^S \mathbf{u} d\Omega \quad (15)$$

e $l(\cdot)$ é um funcional contínuo e linear dado por

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \mathbf{v} d\Gamma_N. \quad (16)$$

Adicionalmente, H e H_0 representam, respectivamente, dois distintos subespaços de funções de Hilbert, definidos por $H = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D\}$ e $H_0 = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D\}$, \mathbf{b} é o vetor de forças de corpo e \mathbf{D}_ρ é o tensor de rigidez constitutiva originado de uma **microestrutura artificial do tipo SIMP** (BENDSØE, 1989; BENDSØE; SIGMUND, 1999). Este tipo de microestrutura permite ao espaço de projeto uma variação contínua do material entre sólido ($\rho = 1$) e vazio ($\rho = 0$). Nesta, as propriedades constitutivas dependem da densidade relativa, ρ , e do tensor elástico do material sólido, \mathbf{D}_0 , os quais são relacionados como (BENDSØE, 1989; BENDSØE; SIGMUND, 1999)

$$\mathbf{D}_\rho = \rho^q \mathbf{D}_0. \quad (17)$$

Este tensor é dependente do expoente q , sendo o material considerado poroso e com uma densidade relativa variando no intervalo $0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1$. Essa relação funciona como uma penalização da rigidez material quando da ocorrência de densidades intermediárias. O parâmetro ρ_{min} representa um limite mínimo arbitrado para a densidade aparente de forma a evitar singularidades numéricas (neste caso, $\rho_{min} = 0,01$).

Quanto ao valor do expoente q , este trabalho utiliza $q = 3$. Geralmente, este é o valor arbitrado na literatura. Além disso, firmado em argumentos matemáticos relacionados a sensibilidade topológica, Amstutz (2011) demonstra que a dependência cúbica é uma adequada escolha para o expoente q em problemas planos da elasticidade linear.

3.2 PROBLEMA DE MÍNIMA FLEXIBILIDADE COM RESTRIÇÃO SOBRE O VOLUME MATERIAL

Definidas as equações que regem a obtenção dos deslocamentos, deformações e tensões ao longo do domínio, o problema de otimização em tela tem como objetivo determinar o campo de densidades relativas $\rho(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega; \{0; 1\})$ tal que ocorra a minimização da flexibilidade da estrutura. Esse é o clássico problema de otimização de topologia de mínima flexibilidade e pode ser expresso como (BENDSØE, 1989):

$$\begin{aligned}
\underset{\rho \in L^\infty(\Omega)}{\text{Min}} \quad c(\rho) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^s \mathbf{u})^T \mathbf{D}_\rho (\nabla^s \mathbf{u}) d\Omega \\
\text{Sujeito a :} \quad &\begin{cases} V(\rho) = \int_{\Omega} \rho d\Omega = \lambda V_0, \\ 0 \leq \rho_{\min} \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases}
\end{aligned} \tag{18}$$

onde c é o funcional de flexibilidade (*compliance*), V é o funcional volume total do material, V_0 é o volume inicial da estrutura e λ é uma fração prescrita do volume inicial que caracteriza a quantidade de material disponível.

A solução do problema de otimização, como posto pela Eq. (18), geralmente, conduz ao aparecimento de extensas regiões de cinza e instabilidades numéricas como o tabuleiro de xadrez (*checkerboard*) (SIGMUND; PETERSSON, 1998; PEREIRA, 2001). Com o objetivo de superar tais dificuldades é realizada uma modificação do problema de otimização através da inserção de dois funcionais. Assim, o problema de otimização na sua forma regularizada pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\underset{\rho \in L^\infty(\Omega)}{\text{Min}} \quad &\left[\chi(\rho) = c(\rho) + r_m \int_{\Omega} f_m(\rho) d\Omega + r_\rho \int_{\Omega} f_\rho(\rho) d\Omega \right] \\
\text{Sujeito a :} \quad &\begin{cases} V(\rho) - \lambda V_0 = h_v(\rho) = 0, \\ 0 < \rho_{\min} \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases}
\end{aligned} \tag{19}$$

sendo r_m e r_ρ fatores de penalização arbitrados e h_v uma restrição de igualdade que restringe o funcional volume V . Além disso, $f_\rho(\rho)$ é a função integrando para regularização do campo de densidades e que penaliza altos valores do gradiente das densidades e $f_m(\rho)$ é a função de penalização para os valores de densidades intermediárias, definidas, respectivamente, por

$$f_\rho(\rho) = (\nabla \rho)^T (\nabla \rho) \quad \text{e} \quad f_m(\rho) = \rho(1 - \rho). \tag{20}$$

O termo f_ρ foi proposto por Pereira (2001) com o intuito de mitigar o fenômeno de tabuleiro de xadrez. Este, é uma alternativa ao termo regularizador descrito por Petersson e Sigmund (1998), o qual baseia-se em impor restrições locais sobre as componentes dos gradientes das densidades. Outras opções de regularização do problema de otimização são

encontradas na literatura e podem conduzir à diminuição ou inibição do fenômeno de tabuleiro de xadrez (AMBROSIO; BUTTAZZO, 1993; HABER; JOG; BENDSØE, 1996; BORRVALL; PETERSSON, 2001). O último termo, f_m , é frequentemente utilizado na literatura para evitar a formação de extensas regiões de cinza (ALLAIRE; FRANCFORT, 1993; ALLAIRE; KOHN, 1993; FANCELLO; PEREIRA, 2003; PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004).

Uma das alternativas para o tratamento matemático do problema de otimização, estabelecido pela Eq. (19), é a utilização do Método do Lagrangeano Aumentado. A teoria referente a este método é bem-posta e pode ser encontrada em diversos textos (BERTSEKAS, 1999; ARORA, 2017).

3.3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO VIA MÉTODO DO LAGRANGEANO AUMENTADO

Aplicando os conceitos de Multiplicadores de Lagrange (BERTSEKAS, 1999) ao problema de otimização de mínima flexibilidade (Eq. 19), este torna-se equivalente ao problema

$$\begin{aligned} \underset{\rho \in L^\infty(\Omega)}{\text{Min}} \left[L(\rho, \eta_L) = \chi(\rho) + \eta_L h_V(\rho) \right] \\ \text{Sujeito a : } \{ 0 < \rho_{\min} \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (21)$$

onde η_L é o multiplicador de Lagrange associado à h_V e $L = L(\rho, \eta_L)$ é o funcional Lagrangeano.

Neste ponto, é importante mencionar que na solução ótima do problema (ρ^*, η^*) , este multiplicador η^* é único. Esta premissa é estabelecida pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (BERTSEKAS, 1999), o qual, considerando o problema em tela, pode ser escrito como:

Teorema 1. Multiplicadores de Lagrange – Condição Necessária:

Assumindo que ρ^ é um ponto de mínimo local do problema (19) e que os funcionais $\chi(\rho)$ e $h_V(\rho)$ são contínuos, então existe um único multiplicador de Lagrange η^* , tal que*

$$\left(L(\rho^*, \eta^*) \right)_G [\delta \rho_i] = \left(\chi(\rho^*) \right)_G [\delta \rho_i] + \eta^* \left(h_V(\rho^*) \right)_G [\delta \rho_i] = 0, \quad (22)$$

onde $(\cdot)_G [\delta \rho_i]$ representa o operador diferencial de Gateaux³ segundo uma perturbação genérica na i -ésima variável de projeto do campo de densidades relativas $\delta \rho_i$.

Nesta tese, o procedimento numérico para a determinação da solução estrutural ótima é baseado no Método do Lagrangeano Aumentado. Este consiste na definição de um novo problema caracterizado pelo funcional Lagrangeano Aumentado. A obtenção desse funcional ocorre através da inserção ao funcional Lagrangeano de uma penalização externa quadrática da restrição sobre o volume material. Assim, o novo problema de otimização pode ser posto através de uma sequência de P subproblemas ($P = 1, 2, \dots, n_p^{max}$) (BERTSEKAS, 1999):

$$\begin{aligned} \underset{\rho \in L^\infty(\Omega)}{\text{Min}} \left[\begin{aligned} \bar{L}(\rho, r_p, \eta_p) &= \chi(\rho) + \eta_p h_V(\rho) + r_p h_V(\rho)^2 \\ &= c(\rho) + r_m \int_{\Omega} f_m(\rho) d\Omega + r_p \int_{\Omega} f_p(\rho) d\Omega + \eta_p h_V(\rho) + r_p h_V(\rho)^2 \end{aligned} \right] \quad (23) \\ \text{Sujeito a: } \{ 0 < \rho_{min} \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned}$$

onde $\bar{L} = \bar{L}(\rho, r_p, \eta_p)$ é o funcional Lagrangeano Aumentado, r_p é o fator de penalização quadrática da restrição sobre a massa e η_p é o multiplicador de Lagrange, ambos os parâmetros fixos durante o P -ésimo subproblema de otimização. A completa caracterização do método necessita da descrição do processo de atualização dos parâmetros r_p e η_p .

Atualização do multiplicador de Lagrange – η_p

A atualização do multiplicador de Lagrange η_p é fundamentada no Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (BERTSEKAS, 1999). Assumindo um ponto de mínimo local, ρ_p , para o funcional \bar{L} , a aplicação do diferencial de Gateaux para esse funcional resulta em

³ A definição matemática de diferencial de Gateaux pode ser encontrada, entre outros textos, em Luenberger (1969).

$$\left(\bar{L}(\rho_P, r_P, \eta_P)\right)_G [\delta \rho_i] = \left(\chi(\rho_P)\right)_G [\delta \rho_i] + \eta_P \left(h_V(\rho_P)\right)_G [\delta \rho_i] + r_P \left(h_V(\rho_P)^2\right)_G [\delta \rho_i]. \quad (24)$$

Assim, como ao longo do processo de otimização o diferencial de Gateaux de \bar{L} deve convergir para o diferencial de Gateaux de L (BERTSEKAS, 1999; PEREIRA, 2001), uma análise conjunta das Eqs. (22) e (24), permite obter a tradicional expressão para atualização do multiplicador de Lagrange η_P (BERTSEKAS, 1999):

$$\eta_{P+1} = \eta_P + 2r_P h_V. \quad (25)$$

Atualização do fator de penalização quadrática da restrição sobre o volume – r_P

O fator de penalização quadrática da restrição, r_P , pode gerar uma acentuada interferência sobre a convergência do algoritmo (PEREIRA, 2001). Isso ocorre, devido ao fato desse fator, além de influenciar diretamente no valor do funcional \bar{L} , interferir também na atualização do multiplicador de Lagrange η_P . Uma alternativa para a atualização do fator de penalização é sua definição de tal modo que este aumente continuamente até um valor limite, $r_P^{máx}$. Matematicamente, tem-se

$$r_{P+1} = \min\{zr_P; r_P^{máx}\}, \text{ com } z > 1 \text{ e } r_P > 0, \forall P \in \mathbb{N}, \quad (26)$$

onde z é um valor escalar constante que define a taxa de aumento de r_P e \mathbb{N} é o conjunto dos números naturais. Frisa-se que esses valores variam de acordo com o tipo de problema e são definidos através de experimentos numéricos (PEREIRA, 2001).

3.4 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO FUNCIONAL LAGRANGEANO AUMENTADO

Nesta Seção é desenvolvida a análise de sensibilidade (AS) do funcional Lagrangeano Aumentado \bar{L} . Esta se dá pela avaliação do diferencial de Gateaux do funcional \bar{L} em relação a uma perturbação qualquer no campo de variáveis de projeto $\delta \rho_i$, denotada

por $(\bar{L})_G [\delta \rho_i]$. Nesse caso, a AS de \bar{L} é escrita através da soma das AS dos funcionais que o compõe, ou seja,

$$\begin{aligned} (\bar{L}(\rho, r_p, \eta_p))_G [\delta \rho_i] = & (c(\rho))_G [\delta \rho_i] + \left(r_m \int_{\Omega} f_m(\rho) d\Omega \right)_G [\delta \rho_i] + \left(r_p \int_{\Omega} f_p(\rho) d\Omega \right)_G [\delta \rho_i] + \dots \\ & \dots + \eta_p (h_p(\rho))_G [\delta \rho_i] + r_p (h_p(\rho))^2_G [\delta \rho_i]. \end{aligned} \quad (27)$$

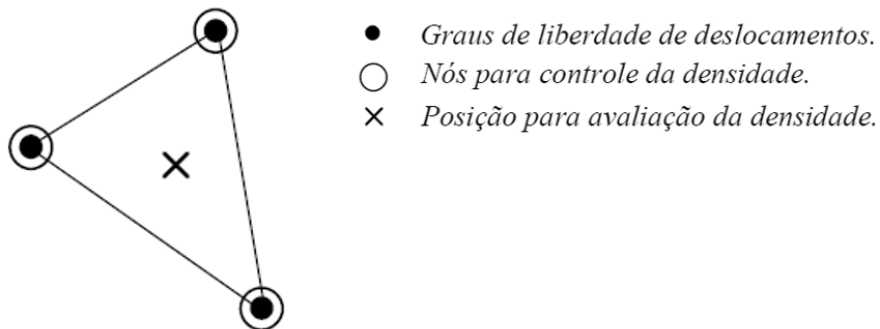
Para tal, inicialmente é necessário definir o **modelo do elemento finito** utilizado na solução do problema de OETC. Nesta tese, opta-se pelo emprego do elemento triangular de deformações constantes (*Constant Strain Triangle* – CST) (FIGURA 5). Os nós do elemento CST são utilizados para avaliar o campo de deslocamentos e para o controle de densidade. O campo de densidades para o K -ésimo elemento, $\rho_K(\mathbf{x})$, é linear e dado por

$$\rho_K(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) \rho_K^1 + \phi_2(\mathbf{x}) \rho_K^2 + \phi_3(\mathbf{x}) \rho_K^3 = \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\rho}_K, \quad (28)$$

onde, $\boldsymbol{\phi}$ representa o vetor com as funções de interpolação linear e $\boldsymbol{\rho}_K$ é o vetor coluna contendo as i -ésimas componentes nodais de densidades, ρ_K^i , do elemento K . Para efeito de simplificação, a obtenção da matriz de rigidez e do vetor de carregamentos consideram o valor da densidade no elemento K constante e avaliada no baricentro desse elemento como

$$\rho_K = \sum_{i=1}^3 \rho_K^i / 3. \quad (29)$$

FIGURA 5 – MODELO DE ELEMENTO FINITO EMPREGADO NO PROCESSO DE OETC.



FONTE: Adaptado de PEREIRA (2001).

Definida a forma de discretização do problema, a seguir é descrito o equacionamento, considerando o modelo discretizado de elementos finitos, para cada termo da Eq. (27). A AS do segundo e terceiro termos do lado direito da Eq. (27), em termos de variáveis contínuas, são descritas nos trabalhos de Pereira (2001), Fancello e Pereira (2003) e Pereira, Fancello e Barcellos (2004).

3.4.1 Análise da sensibilidade do funcional $c(\rho)$

A AS do funcional energia de deformação é frequentemente exposta na literatura, podendo ser encontrada, por exemplo, no livro de Bendsøe e Sigmund (2003) ou no trabalho de Wang et al. (2013). Inicialmente, descreve-se o funcional energia de deformação da estrutura (c), em termos do modelo de elementos finitos discretizado, como (WANG et al., 2013)

$$c = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{NEI} \mathbf{u}_K^T \mathbf{K}_K \mathbf{u}_K, \quad (30)$$

onde NEI é o número total de elementos na malha, \mathbf{u}_K é o vetor de deslocamentos do elemento K e \mathbf{K}_K é a matriz de rigidez elementar considerando a microestrutura SIMP, dada por

$$\mathbf{K}_K = \int_{\Omega_K} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_\rho \mathbf{B}^T d\Omega = \int_{\Omega_K} \rho^q \mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B}^T d\Omega. \quad (31)$$

Neste caso, Ω_K representa o domínio ocupado pelo elemento K e \mathbf{B} a matriz contendo as derivadas das funções de interpolação ϕ .

A sensibilidade do funcional c , aqui denotada $(c)_G [\delta \rho_i]$ (com $1 \leq i \leq nvp$), pode ser realizada de várias formas (CHOI; KIM, 2005). Uma alternativa é a aplicação do Método Direto. No caso discreto, a aplicação deste método ao funcional em análise resulta em (BENDSØE; SIGMUND, 2003; WANG et al., 2013)

$$(c(\rho))_G[\delta\rho_i] = -\frac{I}{2}\mathbf{u}^T((\mathbf{K})_G[\delta\rho_i])\mathbf{u} = -\frac{I}{2}\sum_{K=1}^{NEI}\mathbf{u}_K^T((\mathbf{K}_K)_G[\delta\rho_i])\mathbf{u}_K, \quad (32)$$

onde $(\mathbf{K}_K)_G[\delta\rho_i]$ representa a aplicação do diferencial de Gateaux a K -ésima matriz de rigidez elementar com respeito a uma variação na i -ésima variável de projeto ρ . Em conjunto com a Eq. (31), $(\mathbf{K}_K)_G[\delta\rho_i]$ pode ser posta como

$$(\mathbf{K}_K)_G[\delta\rho_i] = \frac{I}{N_{\text{nós}}} \int_{\Omega_K} q\rho_K(\mathbf{x})^{(q-1)} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B} \mathcal{G}_{ij} d\Omega. \quad (33)$$

sendo $N_{\text{nós}}$ o número de nós por elemento (ou seja, $N_{\text{nós}} = 3$) e \mathcal{G}_{ij} uma função definida como

$$\mathcal{G}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (34)$$

com $j = A, B$ ou C , sendo estes os parâmetros que indicam o número global dos nós do K -ésimo elemento finito. Nota-se que a função \mathcal{G}_{ij} tem por objetivo distribuir a sensibilidade do elemento K para seus nós.

Ademais, cabe ressaltar que o cálculo de $(c)_G[\delta\rho_i]$ é aproximado considerando que ρ_K é dado pela Eq. (29). Portanto, tem-se

$$(c)_G[\delta\rho_i] = -\frac{I}{2N_{\text{nós}}} \sum_{K=1}^{NEI} \mathbf{u}_K^T \left(q\rho_K^{(q-1)} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B} \mathcal{G}_{ij} A_K e_K \right) \mathbf{u}_K, \quad (35)$$

sendo, A_K e e_K , respectivamente, a área e a espessura (ambos considerados constantes) do elemento K .

3.4.2 Análise da sensibilidade do funcional $r_m \int_{\Omega} f_m(\rho) d\Omega$

O funcional de penalização das densidades intermediárias, $r_m \int_{\Omega} f_m(\rho) d\Omega$, pode ser posto, de forma explícita em relação ao campo de densidades ρ , como

$$r_m \int_{\Omega} f_m(\rho) d\Omega = r_m \int_{\Omega} \rho(1-\rho) d\Omega = r_m \sum_{K=1}^{NEI} \int_{\Omega_K} \rho_K(\mathbf{x})(1-\rho_K(\mathbf{x})) d\Omega. \quad (36)$$

Admitindo que a densidade de cada elemento ρ_K é constante e dada pela Eq. (29), a expressão (36) pode ser aproximada por

$$r_m \int_{\Omega} f_m(\rho) d\Omega \approx r_m \sum_{K=1}^{NEI} (\rho_K - \rho_K^2) A_K e_K. \quad (37)$$

Assim, a AS deste funcional em relação à i -ésima componente do campo de densidades ρ , é obtida através da avaliação do diferencial de Gateaux dada uma perturbação dessa componente, aqui denotada $\left(r_m \int_{\Omega} f_m(\rho) d\Omega \right)_G [\delta\rho_i]$, resultando em

$$\left(r_m \int_{\Omega} f_m(\rho) d\Omega \right)_G [\delta\rho_i] = \frac{r_m}{N_{nós}} \sum_{K=1}^{NEI} [(1-2\rho_K) A_K e_K \vartheta_{ij}]. \quad (38)$$

3.4.3 Análise da sensibilidade do funcional $r_{\rho} \int_{\Omega} f_{\rho}(\rho) d\Omega$

Inicialmente, considera-se a expansão do funcional de regularização para inibição do tabuleiro de xadrez, $r_{\rho} \int_{\Omega} f_{\rho}(\rho) d\Omega$, como

$$r_{\rho} \int_{\Omega} f_{\rho}(\rho) d\Omega = r_{\rho} \int_{\Omega} \nabla \rho^T \nabla \rho d\Omega = r_{\rho} \sum_{K=1}^{NEI} \int_{\Omega_K} \nabla \rho_K^T \nabla \rho_K d\Omega, \quad (39)$$

onde ρ_K é definido através da Eq. (28) e, portanto, $\nabla \rho_K$ é o vetor gradiente do campo de densidades elementares, dado por

$$\nabla \rho_K = \begin{Bmatrix} \partial \rho_K / \partial x \\ \partial \rho_K / \partial y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{\rho_K} \boldsymbol{\rho}_K = \begin{bmatrix} B_{x1}^K & B_{x2}^K & B_{x3}^K \\ B_{y1}^K & B_{y2}^K & B_{y3}^K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_K^1 \\ \rho_K^2 \\ \rho_K^3 \end{Bmatrix}. \quad (40)$$

Neste caso, \mathbf{B}_{ρ_K} é uma matriz formada por coeficientes constantes que representam as derivadas das funções de forma ϕ_i em relação às direções Cartesianas x e y . Assim, o integrando do funcional de regularização, pode ser escrito como

$$f_\rho(\rho) = \|\nabla \rho_K\|^2 = \nabla \rho_K^T \nabla \rho_K = \boldsymbol{\rho}_K^T \mathbf{B}_{\rho_K}^T \mathbf{B}_{\rho_K} \boldsymbol{\rho}_K = \boldsymbol{\rho}_K^T \bar{\mathbf{B}}_{\rho_K} \boldsymbol{\rho}_K, \quad (41)$$

sendo $\bar{\mathbf{B}}_{\rho_K}$ uma matriz simétrica definida por $\bar{\mathbf{B}}_{\rho_K} = \mathbf{B}_{\rho_K}^T \mathbf{B}_{\rho_K}$.

Dado este conjunto de definições, a AS do funcional regularização para inibição do fenômeno de tabuleiro de xadrez, denotada por $\left(r_\rho \int_\Omega f_\rho(\rho) d\Omega \right)_G [\delta \rho_i]$, é dada por

$$\begin{aligned} \left(r_\rho \int_\Omega f_\rho(\rho) d\Omega \right)_G [\delta \rho_i] &= r_\rho \left(\sum_{K=1}^{NEI} \int_{\Omega_K} \|\nabla \rho_K\|^2 d\Omega \right)_G [\delta \rho_i] \\ &= r_\rho \left(\sum_{K=1}^{NEI} \int_{\Omega_K} \left(\|\nabla \rho_K\|^2 \right)_G [\delta \rho_i] d\Omega \right), \end{aligned} \quad (42)$$

onde $\left(\|\nabla \rho_K\|^2 \right)_G [\delta \rho_i]$ é posta como

$$\left(\|\nabla \rho_K\|^2 \right)_G [\delta \rho_i] = 2 \bar{\mathbf{B}}_{\rho_K} \boldsymbol{\rho}_K \mathbf{g}_{ij}. \quad (43)$$

Portanto, $\left(r_\rho \int_{\Omega} f_\rho(\rho) d\Omega \right)_G [\delta\rho_i]$ pode ser avaliado como

$$\left(r_\rho \int_{\Omega} f_\rho(\rho) d\Omega \right)_G [\delta\rho_i] = r_\rho \sum_{K=1}^{NEI} 2\bar{\mathbf{B}}_{\rho_K} \boldsymbol{\rho}_K A_K \mathbf{e}_K \mathfrak{g}_{ij}. \quad (44)$$

3.4.4 Análise da sensibilidade do funcional $\eta_p h_V(\rho)$

A sensibilidade do termo $\eta_p h_V(\rho)$, aqui denotada $(\eta_p h_V(\rho))_G [\delta\rho_i]$, expressa a parcela da sensibilidade do funcional \bar{L} referente à variação da restrição sobre o volume $h_V(\rho)$, ponderada pelo multiplicador de Lagrange η_p , quando uma perturbação genérica é inserida sobre o campo de densidades. A sensibilidade de $\eta_p h_V(\rho)$ pode ser avaliada como

$$(\eta_p h_V(\rho))_G [\delta\rho_i] = \eta_p (h_V(\rho))_G [\delta\rho_i] = \eta_p (V(\rho) - \mu V_0)_G [\delta\rho_i] = \eta_p (V(\rho))_G [\delta\rho_i], \quad (45)$$

onde, $(V(\rho))_G [\delta\rho_i]$ é a sensibilidade do funcional volume, dada por

$$\begin{aligned} (V(\rho))_G [\delta\rho_i] &= \left(\int_{\Omega} \rho d\Omega \right)_G [\delta\rho_i] \approx \left(\sum_{K=1}^{NEI} ((\rho_K^1 + \rho_K^2 + \rho_K^3)/3) A_K \mathbf{e}_K \right)_G [\delta\rho_i] \\ &= \sum_{K=1}^{NEI} ((A_K \mathbf{e}_K) / 3) \mathfrak{g}_{ij}. \end{aligned} \quad (46)$$

3.4.5 Análise da sensibilidade do funcional $r_p h_V(\rho)^2$

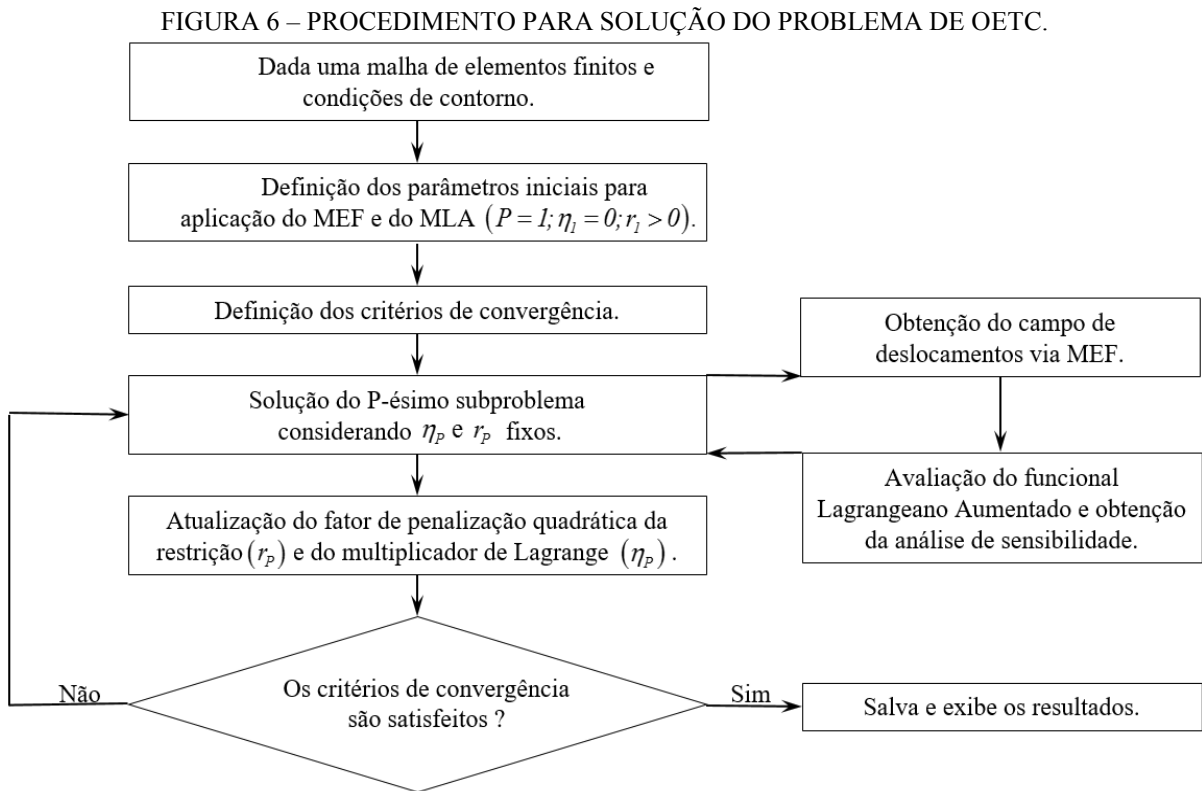
O quinto termo da Eq. (23), $r_p h_V(\rho)^2$, representa a penalização quadrática sobre a restrição volume. Neste caso, como r_p e η_p são constantes, a sensibilidade deste termo, denotada $(r_p h_V(\rho)^2)_G [\delta\rho_i]$, pode ser encontrada de forma semelhante à sensibilidade da parcela $\eta_p h_V(\rho)$. Assim, a partir da Eq. (46), $(r_p h_V(\rho)^2)_G [\delta\rho_i]$ pode ser posta como

$$\begin{aligned}
\left(r_p h_v(\rho)^2\right)_G [\delta \rho_i] &= r_p \left(h_v(\rho)^2\right)_G [\delta \rho_i] = r_p \left((V(\rho) - \mu V_0)^2\right)_G [\delta \rho_i] \\
&= 2r_p (V(\rho) - \mu V_0) (V(\rho))_G [\delta \rho_i] \\
&\approx 2r_p \left(\left(\sum_{K=1}^{NEI} (A_K e_K \rho_K) \right) - \mu V_0 \right) \left(\sum_{e=1}^{NEI} ((A_e e_e) / 3) v_{ij} \right),
\end{aligned} \tag{47}$$

sendo ρ_K a densidade do K -ésimo elemento avaliada pela Eq. (29).

3.5 PROCEDIMENTO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Esta Seção apresenta o procedimento utilizado na busca da solução do problema de OETC em análise. Para tal, na FIGURA 6 são descritas, por meio de um fluxograma, as principais etapas para obtenção da solução ótima.



FONTE: O autor (2017).

Neste ponto, é importante notar que o procedimento exposto na FIGURA 6 permite somente a obtenção de um campo de densidades ótimo, ou seja, a distribuição ótima de material na estrutura base. Dessa forma, a partir da definição desse campo, é possível

proceder com a análise dos erros de discretização, e consequentemente, com o projeto da nova malha de elementos finitos. Estas etapas são tratadas nos Capítulos 4 e 5.

Além disso, para a solução de cada subproblema, emprega-se o clássico método do Gradiente Conjugado para a obtenção da direção de minimização e o método da Seção Áurea para encontrar o tamanho do passo (minimização unidimensional). A descrição desses métodos pode ser encontrada em Arora (2017).

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS H-ADAPTATIVO ISOTRÓPICO: RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ISOTRÓPICO

Neste Capítulo é apresentado o equacionamento do MEF h-adaptativo isotrópico utilizado na corrente tese. A estimativa dos erros de discretização e a determinação do tamanho dos novos elementos através de clássicas técnicas h-adaptativas são discutidas na Seção 4.1. Na Seção 4.2 é proposta uma nova técnica, denominada Recuperação da Densidade do Erro Isotrópico (*Isotropic Error Density Recovery* – IEDR), com vistas a problemas de OECT. Por fim, na Seção 4.3 é descrita a aplicação da técnica IEDR a problemas elípticos do tipo Poisson.

4.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS H-ADAPTATIVO: FORMULAÇÃO

Após a obtenção de uma solução numérica para uma dada discretização de elementos finitos, o processo h-adaptativo de refino da malha pode ser dividido em três principais etapas: a estimativa dos erros de discretização, a determinação da dimensão dos novos elementos e a geração da malha adaptada. Nesta tese, a terceira etapa é realizada pelo gerador BAMG (HECHT, 1998, 2006, 2012). Assim, esta Seção tem por objetivo apresentar o estimador utilizado na análise dos erros, bem como duas técnicas h-adaptativas encontradas na literatura e empregadas na comparação e avaliação das novas metodologias de refino. Para efeito de simplificação, estas etapas são discutidas com base no problema de elasticidade plana considerando propriedades materiais constantes (Eq. (14) com $\mathbf{D}_\rho = \mathbf{D}_0$).

4.1.1 Estimativa dos erros de discretização

Entende-se por função erro, \mathbf{e} , a diferença entre a solução numérica obtida via MEF, \mathbf{u}^{MEF} , e a solução analítica, \mathbf{u} , ou seja, $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{MEF}$. Este conceito pode ser estendido para diferentes variáveis e classes de problemas. Por exemplo, as funções tensoriais erro em deformações (\mathbf{e}_ε) e tensões (\mathbf{e}_σ) são dadas, respectivamente, como $\mathbf{e}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{MEF}$ e $\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{MEF}$ (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

A mensuração da função erro pode ser realizada através de diferentes normas. Na corrente tese, utiliza-se a norma do erro em energia, $\|e\|$, a qual pode ser escrita como (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987)

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{MEF})^T \mathbf{D}_0 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{MEF}) d\Omega \right]^{1/2} \text{ ou} \quad (48)$$

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{MEF})^T \mathbf{D}_0^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{MEF}) d\Omega \right]^{1/2}. \quad (49)$$

A representação do valor absoluto do erro em energia através de uma medida relativa, denominada erro relativo global, η , é dada por (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987)

$$\eta = \|e\| / \|u\| \quad (50)$$

e auxilia na interpretação e quantificação dos erros de discretização. Aqui, $\|u\|$ é a norma que expressa a medida analítica da energia total do sistema, ou seja,

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_0^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right)^{1/2}. \quad (51)$$

Como geralmente a solução analítica u (e, portanto, $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$) não é conhecida, impedindo assim a avaliação analítica da norma do erro em energia (Eq. (48) e (49)), algumas alternativas são apresentadas na literatura para estimar os erros de discretização. Nesta tese, emprega-se o clássico estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação proposto por Zienkiewicz e Zhu (1987), posto como

$$\|e^{est}\| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^{REC} - \boldsymbol{\sigma}^{MEF})^T \mathbf{D}_0^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^{REC} - \boldsymbol{\sigma}^{MEF}) d\Omega \right]^{1/2}, \quad (52)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^{REC}$ é o campo de tensões recuperado. Este campo, converge para a solução analítica mais rapidamente que $\boldsymbol{\sigma}^{MEF}$, sendo definido a partir da interpolação de valores nodais de

tensões mediante as funções de forma utilizadas para interpolar o campo de deslocamentos. Com isso, tem-se um campo de tensões suave e contínuo entre os elementos da malha. Alguns métodos de recuperação dos gradientes da solução são citados no Capítulo 2.

Além disso, o erro relativo global η (Eq. (50)) pode ser aproximado empregando a Eq. (52) em conjunto com a propriedade de ortogonalidade do erro em relação à solução numérica (ODEN; REDDY, 2011), ou seja,

$$\eta^{est} = \|\mathbf{e}^{est}\| / \|\mathbf{u}\|, \quad com \quad \|\mathbf{u}\| \approx \left(\|\mathbf{u}^{MEF}\|^2 + \|\mathbf{e}^{est}\|^2 \right)^{1/2}, \quad (53)$$

onde $\|\mathbf{u}^{MEF}\|$ é a energia total avaliada segundo um campo de deformações ou tensões aproximadas (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987).

Uma medida útil na caracterização da qualidade de um estimador de erro é o índice de efetividade, θ^{ZZ} , expresso por (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987, 1992b)

$$\theta^{ZZ} = \|\mathbf{e}^{est}\| / \|\mathbf{e}\|. \quad (54)$$

Observa-se que para θ^{ZZ} igual a 1 têm-se uma estimativa verdadeira dos erros de discretização, enquanto que para $\theta^{ZZ} > 1$ e $\theta^{ZZ} < 1$ ocorre, respectivamente, superestimativa e subestimativa dos erros.

4.1.2 Técnicas h-adaptativas

Esta Subseção apresenta brevemente duas estratégias h-adaptativas expostas na literatura, aqui denominadas, Ch^p (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987) e LB (LI; BETTESS, 1995; LI, et al., 1995). Para ambas, admite-se que uma malha é convergente caso o erro relativo em energia, η , seja menor ou igual ao erro admissível, $\bar{\eta}$. Ademais, busca-se uma malha onde os erros de discretização sejam igualmente distribuídos entre os elementos.

A **técnica Ch^p** foi proposta por Zienkiewicz e Zhu (1987) e estima que o novo tamanho dos elementos, h_{new} , considerando ausência de singularidades, é dado por

$$h_{new} = \left(h_{old} / \zeta_K^{(1/p)} \right), \quad com \quad \zeta_K = \|\mathbf{e}\|_K / \bar{e}, \quad (55)$$

sendo h_{old} o tamanho do elemento corrente, p o grau polinomial da aproximação de elementos finitos, $\|\mathbf{e}\|_K$ o erro em energia para o elemento K e \bar{e} o erro limite admissível por elemento, escrito como

$$\bar{e} = \bar{\eta} \|\mathbf{u}\| / \sqrt{NEI}. \quad (56)$$

Portanto, ζ_K é um parâmetro de refinamento que indica se o elemento sofrerá refino ($\zeta_K > 1$) ou desrefino ($\zeta_K < 1$).

A **técnica LB**, introduzida por Li e Bettess (1995) e Li et al. (1995), determina que o tamanho dos novos elementos pode ser posto como

$$h_{new} = h_{old} \left(\frac{\bar{\eta} \|\mathbf{u}\|}{\sqrt{NEI_{new}} \|\mathbf{e}\|_K} \right)^{1/(p+(d/2))}, \quad (57)$$

onde d é a dimensão física do problema (neste caso, $d = 2$) e NEI_{new} é o número de elementos da nova malha, estimado como

$$NEI_{new} = (\bar{\eta} \|\mathbf{u}\|)^{-d/p} \left(\sum_{K=1}^{NEI} (\|\mathbf{e}\|_K)^{d/(p+d/2)} \right)^{(p+d/2)/p}. \quad (58)$$

Esta notação está exposta no trabalho de Díez e Huerta (1999). Conforme posto por Li et al. (1995), pode-se citar duas principais diferenças entre estas estratégias. A primeira está no fato que a técnica Ch^p depende do número de elementos da malha corrente, enquanto que a técnica LB busca equidistribuir os erros com base no número de elementos da malha futura. A segunda é em relação ao expoente que determina a taxa de aumento ou redução dos elementos. Neste ponto, cabe ressaltar que ambas as técnicas se baseiam em relações fixadas *a priori* quanto ao comportamento dos erros de discretização.

4.2 RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ISOTRÓPICA – IEDR: APLICAÇÃO A PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A formulação descrita nesta Seção é apresentada também em Silva e Pereira (2017). Esta técnica h-adaptativa envolve a aplicação do conceito de função densidade do erro em energia de deformação em conjunto com técnicas de otimização, tendo como objetivo equidistribuir e limitar os erros de discretização. É possível considerar a técnica IEDR como uma modificação da técnica de Recuperação Quadrática do Erro (*Quadratic Error Recovery* – QER) (GONÇALVES, 2016; PEREIRA; SILVA; GONÇALVES, 2016). São três as principais diferenças:

- A técnica QER estima o tamanho dos elementos com base em uma área igual a uma circunferência ótima de raio r , a qual é projetada para satisfazer um erro limite no interior de seu domínio. Por outro lado, a técnica IEDR propõe buscar diretamente os novos tamanhos dos elementos triangulares através de um problema de otimização.
- A técnica IEDR considera no cálculo das novas dimensões do elemento a abrupta variação do campo de densidades resultante do processo de OETC. Esta modificação é realizada diretamente na obtenção da função densidade do erro em energia de deformação.
- O valor do erro limite por elemento é obtido através de um processo iterativo, o qual considera uma projeção para a dimensão da malha futura.

4.2.1 Definição da função densidade do erro em energia de deformação

A definição da função densidade do erro em energia de deformação permite considerar, na obtenção dos parâmetros da nova malha de elementos finitos, a variação das propriedades materiais intrínsecas aos problemas de topologia. Esta função, na corrente tese, é uma forma alternativa de representar o integrando do estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação (Eq. (52)) definido em um elemento qualquer.

Assim, seja um domínio Ω submetido a carregamentos de domínio e de contorno e adequadamente restrito contra movimento de corpo rígido. É suposto que suas propriedades materiais são não-uniformes, mas com variações limitadas. Por exemplo, essas propriedades podem decorrer do campo de densidades ρ obtido ao final de algum processo de OETC

(FIGURA 4). Ademais, admite-se que são conhecidos os campos de densidades e deslocamentos, ambos definidos por valores nodais em uma malha de elementos do tipo CST (FIGURA 5).

Através do pós-processamento da solução, pode-se obter um campo de tensões, σ_{ρ}^{MEF} , constante no elemento e avaliado em função do campo de densidades, como

$$\sigma_{\rho}^{MEF} = \bar{\rho}^q \sigma^{MEF} = \bar{\rho}^q \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{MEF} \\ \sigma_{22}^{MEF} \\ \tau_{12}^{MEF} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{11}^{MEF} \\ \tilde{\sigma}_{22}^{MEF} \\ \tilde{\tau}_{12}^{MEF} \end{Bmatrix}, \quad (59)$$

onde q é um valor escalar associado à microestrutura SIMP, $\bar{\rho}$ é a média simples dos valores de densidades nodais no elemento e σ^{MEF} representa o campo de tensões elementar obtido pelo MEF, expresso por

$$\sigma^{MEF} = D_0 \varepsilon^{MEF}. \quad (60)$$

Ademais, considerando o i -ésimo nó ($i = 1, 2$ ou 3) do elemento em análise e incorporando a variação do campo de densidades, ρ , a um vetor de tensões nodais recuperadas, $^{(i)}\sigma^{REC}$, tem-se

$$^{(i)}\sigma_{\rho}^{REC} = \left(\rho^{(i)}\right)^q {}^{(i)}\sigma^{REC} = \left(\rho^{(i)}\right)^q \begin{Bmatrix} {}^{(i)}\sigma_{11}^{REC} \\ {}^{(i)}\sigma_{22}^{REC} \\ {}^{(i)}\tau_{12}^{REC} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{(i)}\tilde{\sigma}_{11}^{REC} \\ {}^{(i)}\tilde{\sigma}_{22}^{REC} \\ {}^{(i)}\tilde{\tau}_{12}^{REC} \end{Bmatrix}, \quad (61)$$

onde $\rho^{(i)}$ é a densidade no i -ésimo nó do elemento e $^{(i)}\sigma^{REC}$ é obtido através da aplicação de algum método de recuperação de tensões, com base nos valores de σ^{MEF} .

Dadas as definições iniciais, uma aproximação linear das tensões recuperadas (σ_{ρ}^{REC}) no domínio do elemento pode ser posta como

$$\boldsymbol{\sigma}_\rho^{REC} = \boldsymbol{\sigma}_\rho^{REC}(x, y) = \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{11}^{REC} \\ \tilde{\sigma}_{22}^{REC} \\ \tilde{\tau}_{12}^{REC} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_0^{11} + B_l^{11}x + B_2^{11}y \\ B_0^{22} + B_l^{22}x + B_2^{22}y \\ B_0^{12} + B_l^{12}x + B_2^{12}y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0^{11} & B_l^{11} & B_2^{11} \\ B_0^{22} & B_l^{22} & B_2^{22} \\ B_0^{12} & B_l^{12} & B_2^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_\sigma^{REC} \mathbf{P}, \quad (62)$$

onde \mathbf{P} é um vetor de coordenadas relativas com origem no baricentro do elemento em análise e \mathbf{B}_σ^{REC} é a matriz com os coeficientes dos campos lineares das tensões recuperadas, ainda incógnitos. Assim, pode-se definir uma componente qualquer de tensões recuperadas, $\tilde{\sigma}_{ij}^{REC}$, como

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{REC} = B_0^{ij} + B_l^{ij}x + B_2^{ij}y = \mathbf{B}_\sigma^{ij} \mathbf{P}. \quad (63)$$

Aplicando a Eq. (63) para cada nó do elemento em análise, um sistema linear de equações pode ser escrito como

$$\begin{Bmatrix} {}^{(1)}\tilde{\sigma}_{ij}^{REC} \\ {}^{(2)}\tilde{\sigma}_{ij}^{REC} \\ {}^{(3)}\tilde{\sigma}_{ij}^{REC} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_0^{ij} \\ B_l^{ij} \\ B_2^{ij} \end{Bmatrix}. \quad (64)$$

Deste modo, a solução da Eq. (64) resulta na determinação dos componentes \mathbf{B}_σ^{ij} da aproximação linear para a ij -ésima componente das tensões recuperadas. Quando estendida para as demais componentes de tensões, todos os coeficientes da matriz \mathbf{B}_σ^{REC} (Eq. (62)) são determinados.

Uma forma de expressar a estimativa para os erros de discretização é por meio da norma erro em energia (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987). Esta norma, definida para o K -ésimo elemento da malha e considerando a variação das propriedades materiais em problemas de otimização topológica, $\|\tilde{\mathbf{e}}\|_K^2$, pode ser posta como

$$\|\tilde{\mathbf{e}}\|_K^2 = \int_{\Omega_K} \tilde{U} \, d\Omega = \int_{\Omega_K} \Delta \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{D}_\rho)^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega, \quad (65)$$

sendo Ω_k o domínio do elemento, \tilde{U} a função densidade do erro em energia para este elemento e $\Delta\sigma$ o vetor da diferença entre as tensões obtidas via MEF e as tensões recuperadas, dado por

$$\Delta\sigma = \sigma_{\rho}^{REC} - \sigma_{\rho}^{MEF} = \mathbf{B}_{\sigma}^{REC} \mathbf{P} - \sigma_{\rho}^{MEF}. \quad (66)$$

Em forma explicita, este vetor pode ser escrito como

$$\Delta\sigma = \begin{bmatrix} B_0^{11} & B_l^{11} & B_2^{11} \\ B_0^{22} & B_l^{22} & B_2^{22} \\ B_0^{12} & B_l^{12} & B_2^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11}^{MEF} & 0 & 0 \\ \tilde{\sigma}_{22}^{MEF} & 0 & 0 \\ \tilde{\tau}_{12}^{MEF} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_0^{11} - \tilde{\sigma}_{11}^{MEF}) & B_l^{11} & B_2^{11} \\ (B_0^{22} - \tilde{\sigma}_{22}^{MEF}) & B_l^{22} & B_2^{22} \\ (B_0^{12} - \tilde{\tau}_{12}^{MEF}) & B_l^{12} & B_2^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{\sigma} \mathbf{P}, \quad (67)$$

sendo \mathbf{B}_{σ} a matriz com os coeficientes do campo linear resultante da diferença entre as tensões. Assim, a função integrando \tilde{U} pode ser escrita como

$$\tilde{U} = \tilde{U}(x, y) = \Delta\sigma^T (\mathbf{D}_{\rho})^{-1} \Delta\sigma = \mathbf{P}^T \mathbf{B}_{\sigma}^T (\mathbf{D}_{\rho})^{-1} \mathbf{B}_{\sigma} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{P}, \quad (68)$$

onde $\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{B}_{\sigma}^T (\mathbf{D}_{\rho})^{-1} \mathbf{B}_{\sigma}$ é uma matriz simétrica e $\mathbf{D}_{\rho} = \bar{\rho}^q \mathbf{D}_0$. A forma expandida da função densidade do erro em energia modificada \tilde{U} pode ser posta como

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{P} = \\ &= (\tilde{Z}_{11}) + (\tilde{Z}_{12} + \tilde{Z}_{21})x + (\tilde{Z}_{13} + \tilde{Z}_{31})y + [\tilde{Z}_{22}x^2 + (\tilde{Z}_{23} + \tilde{Z}_{32})xy + \tilde{Z}_{33}y^2] \\ &= \tilde{U}_0 + (\tilde{G}_1x + \tilde{G}_2y) + (\tilde{H}_{11}x^2 + 2\tilde{H}_{12}xy + \tilde{H}_{22}y^2) \\ &= \tilde{U}_0 + \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (69)$$

onde \tilde{U}_0 , $\tilde{\mathbf{G}}$, e $\tilde{\mathbf{H}}$ são dados por

$$\tilde{U}_0 = \tilde{Z}_{11}, \quad (70)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{Bmatrix} \tilde{G}_1 \\ \tilde{G}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{Z}_{12} + \tilde{Z}_{21} \\ \tilde{Z}_{13} + \tilde{Z}_{31} \end{Bmatrix}, \quad (71)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{22} & \tilde{Z}_{23} \\ \tilde{Z}_{32} & \tilde{Z}_{33} \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Nota-se que a função $\tilde{U}(x, y)$ é composta de um termo escalar (\tilde{U}_0), uma forma linear ($\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{x}$) e uma forma quadrática ($\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x}$), todos definidos no espaço R^2 .

4.2.2 Cálculo do erro total em uma região triangular no entorno de um elemento

Inicialmente, considera-se a função densidade do erro em energia modificada, \tilde{U} , dada pela Eq. (69) e que o domínio de um elemento seja um triângulo equilátero de tamanho de aresta h com centro no baricentro do elemento em análise. Neste caso, é possível escrever a norma do erro em energia em uma região de domínio triangular Ω_K^T como

$$\begin{aligned} E_K^2 &= \int_{\Omega_K^T} \tilde{U} d\Omega = \int_{\Omega_K^T} \left[\tilde{U}_0 + (\tilde{G}_1 x + \tilde{G}_2 y) + (\tilde{H}_{11} x^2 + 2\tilde{H}_{12} xy + \tilde{H}_{22} y^2) \right] d\Omega \\ &= \tilde{U}_0 \int_{\Omega_K^T} d\Omega + \tilde{G}_1 \int_{\Omega_K^T} x d\Omega + \tilde{G}_2 \int_{\Omega_K^T} y d\Omega + \tilde{H}_{11} \int_{\Omega_K^T} x^2 d\Omega + 2\tilde{H}_{12} \int_{\Omega_K^T} xy d\Omega + \tilde{H}_{22} \int_{\Omega_K^T} y^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (73)$$

Nesta equação, o segundo, terceiro e quinto termos integrais do lado direito são nulos (fato que decorre da geometria de um triângulo equilátero e do sistema de coordenadas relativas adotado). Assim, a Eq. (73) pode ser simplificada por

$$E_K^2 = \tilde{U}_0 A_K + \tilde{H}_{11} I_{K_y} + \tilde{H}_{22} I_{K_x}, \quad (74)$$

onde A_K corresponde à área e I_{K_x} e I_{K_y} são os momentos de área de segunda ordem do triângulo. As características geométricas referentes ao triângulo equilátero podem ser expressas como

$$\begin{aligned}
A_K &= \int_{\Omega_K^T} d\Omega = \alpha h^2, \quad \text{com} \quad \alpha = \sqrt{3}/4, \\
I_{K_x} &= \int_{\Omega_K^T} y^2 d\Omega = I_{K_y} = \int_{\Omega_K^T} x^2 d\Omega = \beta h^4, \quad \text{com} \quad \beta = \sqrt{3}/96.
\end{aligned} \tag{75}$$

Com isso, uma estimativa para o erro quadrático total em uma região triangular, de aresta genérica h , centrada no baricentro do elemento em análise na malha corrente, pode ser posta como

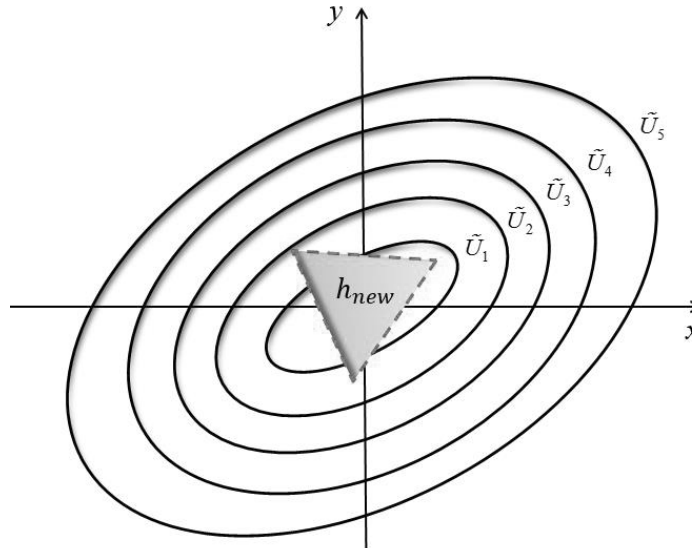
$$E_K^2 = h^2 \left[\alpha \tilde{U}_o + \beta \text{tr}(\tilde{\mathbf{H}}) h^2 \right], \tag{76}$$

onde $\text{tr}(\tilde{\mathbf{H}}) = \tilde{H}_{11} + \tilde{H}_{22}$. A definição da norma do erro em energia através da Eq. (76) permite determinar o novo tamanho do elemento através da solução analítica de um problema de otimização. Tal processo é descrito a seguir.

4.2.3 Projeto da nova geometria do elemento via otimização

O objetivo é encontrar um triângulo equilátero de arestas h_{new} , centrado no baricentro de um elemento triangular Ω_K de aresta h_{old} . O novo elemento deve possuir, em seu interior, um valor de erro total (E_{new}) limitado por um valor de erro admissível ($\bar{\epsilon}$) (FIGURA 7).

FIGURA 7 – TRIÂNGULO ÓTIMO COM ÁREA LIMITADA PELA FUNÇÃO DENSIDADE DO ERRO EM ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.



FONTE: Adaptado de Silva e Pereira (2017).

Matematicamente, pode-se encontrar o tamanho ótimo do novo elemento através de um problema de otimização, onde o objetivo é maximizar o tamanho da aresta do triângulo centrado no elemento, mas restrito a $E_{new}^2 \leq \bar{e}^2$. Este problema de otimização pode ser posto, na forma padrão, como

$$P: \begin{cases} \text{minimizar } -h \\ \text{Sujeito a : } g(h) \leq 0, \end{cases} \quad (77)$$

onde $g(h)$ é a função restrição do erro no elemento, dada por

$$g(h) = E_{new}^2 - \bar{e}^2 = h^2 \left[\alpha \tilde{U}_0 + \beta \text{tr}(\tilde{\mathbf{H}}) h^2 \right] - \bar{e}^2. \quad (78)$$

A solução do problema de otimização (Eq. (77)) pode ser realizada aplicando o método dos Multiplicadores de Lagrange. Este se baseia na construção da função Lagrangeano (L), a qual depende do tamanho do elemento (h) e do multiplicador de Lagrange (λ^*), posta como

$$L(h, \lambda^*) = -h + \lambda^* g(h) = -h + \lambda^* \left[h^2 \left(\alpha \tilde{U}_0 + \beta \text{tr}(\tilde{\mathbf{H}}) h^2 \right) - \bar{e}^2 \right]. \quad (79)$$

A determinação do tamanho ótimo do novo elemento pode ser realizada pela aplicação das condições necessárias de primeira ordem à função Lagrangeano, dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \left[-1 + \lambda^* \left(2\alpha \tilde{U}_0 h + 4\beta \text{tr}(\tilde{\mathbf{H}}) h^3 \right) \right] = 0, \quad (80)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda^*} = g(h) = h^2 \left[\alpha \tilde{U}_0 + \beta \text{tr}(\tilde{\mathbf{H}}) h^2 \right] - \bar{e}^2 = 0. \quad (81)$$

Reescrevendo a Eq. (81) na forma

$$\left[\beta \text{tr}(\tilde{\mathbf{H}}) \right] h^4 + \left[\alpha \tilde{U}_0 \right] h^2 - \bar{e}^2 = 0, \quad (82)$$

observa-se que esta se trata de uma equação de segundo grau na variável h^2 . Tal equação possui uma única raiz real e positiva dada por

$$h_{new} = \left(\frac{\sqrt{(\alpha \tilde{U}_0)^2 + 4\beta tr(\tilde{\mathbf{H}})\bar{e}^2} - \alpha \tilde{U}_0}{2\beta tr(\tilde{\mathbf{H}})} \right)^{1/2}. \quad (83)$$

A aplicação da Eq. (83) a todos os elementos da malha permite a especificação completa da malha de parâmetros.

De acordo com a teoria, o erro percentual global em energia deveria decrescer monotonicamente para o valor de erro admissível em um processo de refino. Entretanto, em análises práticas, próximo à convergência do erro percentual, pode-se perceber uma não-monotonicidade. Este fato, pode ser atribuído à aproximação envolvida na geração da malha e na análise de erro (LI et al., 1995). Para evitar essa oscilação, faz-se o uso de uma simples constante de aceleração, \bar{C} , aplicada diretamente à estimativa dos novos elementos (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987; LI et al, 1995). Neste caso, pode-se reescrever a Eq. (83) como

$$h_{new} = \bar{C} \left(\frac{\sqrt{(\alpha \tilde{U}_0)^2 + 4\beta tr(\tilde{\mathbf{H}})\bar{e}^2} - \alpha \tilde{U}_0}{2\beta tr(\tilde{\mathbf{H}})} \right)^{1/2}, \text{ onde } \bar{C} = \omega^{-1/p-m+1}. \quad (84)$$

Neste caso, ω é um valor escalar maior que a unidade, p é o grau polinomial da aproximação via MEF e m é a maior ordem de diferenciação do operador deformação.

Outra questão de relevância é o fato de que a Eq. (83) é não-linear e dependente de \bar{e} . Uma possível definição para \bar{e} é a apresentada por Zienkiewicz e Zhu (Eq. (56)), a qual depende do número de elementos da malha corrente (NEI). Embora este valor possa ser utilizado para uma estimativa do tamanho dos elementos, o corrente trabalho utiliza um processo iterativo de busca do tamanho do novo elemento. Resultados numéricos evidenciam que este processo possibilita uma boa estimativa do número total de elementos da nova malha e, portanto, melhores estimativas do tamanho dos elementos mesmo para malhas com um número de elementos significativamente diferente da malha adaptada.

4.2.4 Processo iterativo da busca do novo elemento

Este processo tem por objetivo encontrar a dimensão do novo elemento tendo como base um valor estimado de $\bar{\epsilon}$ o mais próximo do requerido e considerando a não-linearidade da Eq. (83). Inicialmente, sendo $\bar{\Omega}_K$ uma região no entorno do elemento T_K , admite-se que a norma do erro em energia neste elemento ($\|\mathbf{e}_K\|$), pode ser limitada por (ZHU; ZIENKIEWICZ, 1988)

$$\|\mathbf{e}\|_K \leq Ch^\mu, \text{ com } \mu = \min(p, \hat{\phi}), \quad (85)$$

onde $\hat{\phi}$ representa a intensidade das singularidades geométricas. Assim, pode-se definir o erro quadrático, posto conforme Eq. (65), para um elemento na malha corrente, $\|\mathbf{e}_{old}\|_K^2$, e na próxima malha, $\|\mathbf{e}_{new}\|_K^2$, respectivamente, como

$$\|\mathbf{e}_{old}\|_K^2 = \int_{\bar{\Omega}_K} \tilde{U}_{old} d\Omega \leq (Ch_{old}^\mu)^2 \quad (86)$$

e

$$\|\mathbf{e}_{new}\|_K^2 = \int_{\bar{\Omega}_K} \tilde{U}_{new} d\Omega \leq (Ch_{new}^\mu)^2, \quad (87)$$

onde \tilde{U}_{old} e \tilde{U}_{new} representam as funções densidade do erro em energia definidas na malha corrente e na próxima malha.

Como a solução deslocamentos $\mathbf{u} \in H^1$ e considerando o domínio de análise de integração, $\bar{\Omega}_K$, igual para as Eqs. (86) e (87), pode-se escrever

$$\bar{U}_{old} | \bar{\Omega}_K | \leq (Ch_{old}^\mu)^2 \quad (88)$$

e

$$\bar{U}_{new} | \bar{\Omega}_K | \leq (Ch_{new}^\mu)^2. \quad (89)$$

Neste caso, \bar{U}_{old} e \bar{U}_{new} são os valores médios das funções \tilde{U}_{old} e \tilde{U}_{new} na região $\bar{\Omega}_K$, cuja medida é expressa por $|\bar{\Omega}_K|$. Relacionando as Eqs. (88) e (89) tem-se

$$\bar{U}_{new} = r^* \bar{U}_{old}, \quad \text{onde} \quad r^* = (h_{new}/h_{old})^{2\mu}. \quad (90)$$

Assim, aplicando este conceito para a forma integral do erro quadrático (Eqs. (86) e (87)), tem-se uma estimativa da função densidade do erro em energia na próxima malha como

$$\tilde{U}_{new} = r^* \tilde{U}_{old}. \quad (91)$$

Considerando a definição da função densidade do erro em energia (Eq. (69)), pode-se expressar

$$\tilde{U}_{new} = r^* (\tilde{U}_0 + \tilde{\mathbf{G}}x + x^T \tilde{\mathbf{H}}x). \quad (92)$$

Portanto, dadas as definições iniciais, a busca pelo tamanho do novo elemento pode ser posta através do Algoritmo A.

Algoritmo A

Passo 1: Definir tolerâncias para a razão rN ($rNToler$) e para o número máximo de iterações (it_{max}). Definir valores iniciais para $rN = 1$, $it = 1$, $NEl_{new} = NEl$ e $r^* = 1$ (Eq. (90)).

Passo 2: Calcular o novo erro elementar admissível $\bar{e}_{new} = \bar{e} = \bar{\eta} \|\mathbf{u}\| / \sqrt{NEl_{new}}$.

Passo 3: Para cada elemento, atualizar (através da Eq. (92)) os valores de \tilde{U}_0 (Eq. (70)), $\tilde{\mathbf{G}}$ (Eq. (71)) e $\tilde{\mathbf{H}}$ (Eq. (72)) para a malha corrente e obter a nova dimensão do elemento, h_{new} (Eq. (83)).

Passo 4: Estimar o número de elementos da malha adaptada (NEl_{new}^{adap}) através da expressão

$$NEl_{new}^{adap} = \sum_{El=1}^{NEl} (h_{old}^{El} / h_{new}^{El})^2, \quad \text{avaliar a razão } rN = NEl_{new}^{adap} / NEl_{new} \quad \text{e atualizar o número}$$

de iterações ($it = it + 1$).

Passo 5: Verificar o critério de convergência: Se $|rN - 1| \leq rNToler$ e $it \leq it_{max}$, vá para o

Passo 6. Caso contrário, atualizar $NEl_{new} = NEl_{new}^{adap}$ e retornar ao Passo 2.

Passo 6: Atualizar o tamanho dos elementos pela constante de aceleração \bar{C} (Eq. (40)) e retornar com o vetor contendo os novos tamanhos dos elementos.

4.3 RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ISOTRÓPICA – IEDR: APLICAÇÃO AO PROBLEMA ELÍPTICO DE SEGUNDA ORDEM DO TIPO POISSON

Esta Seção descreve a formulação da técnica IEDR em problemas elípticos escalares bidimensionais governados pela equação de Poisson. Este equacionamento é uma simplificação da metodologia abordada na Seção 4.2 e, neste caso, considera problemas com propriedades materiais constantes.

4.3.1 Problema de Poisson: estimativa dos erros de discretização e definição do erro admissível

Considera-se um problema escalar elíptico genérico do tipo Poisson, definido em um domínio Ω , cuja forma variacional pode ser posta como:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } u(x, y) \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ &\int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{k} \nabla u \, d\Omega = \int_{\Omega} v f \, d\Omega, \quad \forall \quad v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (93)$$

onde u é a solução analítica, \mathbf{k} é um tensor constante de segunda ordem (no corrente estudo, considerado isotrópico), f é a função escalar de excitação de domínio, ∇ é o operador diferencial gradiente, v é uma função de variação cinematicamente admissível qualquer e H_0^1 denota o espaço de Hilbert de primeira ordem com suporte compacto em Ω .

Dada a solução da Eq. (93) obtida via MEF, a norma do erro em energia ($\|e\|$) pode ser escrita como (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987)

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\nabla u - \nabla u^{MEF})^T \mathbf{k} (\nabla u - \nabla u^{MEF}) \, d\Omega \right]^{1/2}, \quad (94)$$

onde, ∇u e ∇u^{MEF} representam, respectivamente, o vetor gradiente da solução analítica e o vetor gradiente da solução aproximada via MEF.

Como já mencionado, a técnica IEDR tem como objetivo limitar e equidistribuir os erros de aproximação ao longo de uma malha de elementos finitos. Para o problema corrente, o erro admissível (\bar{e}), pode ser posto como (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987)

$$\bar{e} = \bar{\eta} \|u\| / \sqrt{NEI}, \quad (95)$$

sendo $\|u\|$ uma medida analítica da energia total do sistema, dada por

$$\|u\| = \left[\int_{\Omega} (\nabla u)^T \mathbf{k} (\nabla u) d\Omega \right]^{1/2}. \quad (96)$$

Considerando que a solução analítica é desconhecida, uma estimativa para a norma do erro em energia ($\|e^{REC}\|$) é posta como (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987)

$$\|e^{REC}\| = \left[\int_{\Omega} (\nabla u^{REC} - \nabla u^{MEF})^T \mathbf{k} (\nabla u^{REC} - \nabla u^{MEF}) d\Omega \right]^{1/2}, \quad (97)$$

sendo ∇u^{REC} o vetor gradiente recuperado a partir da solução aproximada. Ademais, devido à propriedade de ortogonalidade do erro em relação à solução aproximada (ODEN; REDDY, 2011), a norma $\|u\|$ pode ser escrita como

$$\|u\| = \left(\|u^{MEF}\|^2 + \|e^{REC}\|^2 \right)^{1/2}, \quad (98)$$

onde $\|u^{MEF}\|$ é norma que expressa a energia total do sistema aproximada via MEF, e dada por

$$\|u^{MEF}\| = \left[\int_{\Omega} (\nabla u^{MEF})^T \mathbf{k} (\nabla u^{MEF}) d\Omega \right]^{1/2}. \quad (99)$$

4.3.2 IEDR: Aplicação em problemas elípticos escalares sem variação das propriedades

A adaptação da técnica IEDR para o problema de Poisson segue os passos descritos para sua construção em problemas de OETC. Deste modo, evita-se seguir uma descrição detalhada de cada etapa, sendo apontadas somente as principais diferenças. A construção da função densidade do erro em energia para esta classe de problemas pode ser encontrada também no trabalho de Pereira e Silva (2017).

Inicialmente, para uma malha composta de elementos finitos do tipo CST, obtêm-se os gradientes da solução aproximada pelo MEF (∇u^{FEM}) e os gradientes recuperados da solução (∇u^{REC}). Este campo pode ser obtido por qualquer método de recuperação, resultando em campos lineares de gradientes em cada elemento, os quais podem ser escritos como

$$\nabla u^{REC} = \begin{Bmatrix} \nabla u_x^{REC} \\ \nabla u_y^{REC} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_0^x + B_1^x x + B_2^x y \\ B_0^y + B_1^y x + B_2^y y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0^x & B_1^x & B_2^x \\ B_0^y & B_1^y & B_2^y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{\nabla u}^{REC} \mathbf{P}, \quad (100)$$

onde $\mathbf{B}_{\nabla u}^{REC}$ representa a matriz com os coeficientes dos campos lineares dos gradientes recuperados e \mathbf{P} é o vetor que contém as coordenadas relativas de um ponto genérico definidas em relação ao baricentro do elemento.

Deste modo, para uma componente qualquer dos gradientes recuperados, ∇u_i^{REC} (com $i = x, y$), pode-se escrever

$$\nabla u_i^{REC} = B_0^i + B_1^i x + B_2^i y = \mathbf{B}_{\nabla u}^i \mathbf{P}. \quad (101)$$

Aplicando a Eq. (101) para cada nó pertencente a um determinado elemento, pode-se escrever um sistema de equações que permite a obtenção das componentes do vetor $\mathbf{B}_{\nabla u}^i$ da aproximação linear para a i -ésima componente dos gradientes recuperados, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \nabla u_{i(nó1)}^{REC} \\ \nabla u_{i(nó2)}^{REC} \\ \nabla u_{i(nó3)}^{REC} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_0^i \\ B_1^i \\ B_2^i \end{Bmatrix}. \quad (102)$$

O emprego deste sistema para as direções x e y permite a completa caracterização da matriz $\mathbf{B}_{\nabla u}^{REC}$ (Eq. (100)).

Assim, a avaliação da norma do erro em energia em uma região qualquer Ω_K^T , que contém o baricentro do elemento K -ésimo, pode ser dada por (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987)

$$\|e^{REC}\|_K^2 = \int_{\Omega_K^T} U \, d\Omega = \int_{\Omega_K^T} \Delta u^T \mathbf{k} \, \Delta u \, d\Omega, \quad (103)$$

sendo U a função densidade do erro em energia e Δu o vetor da diferença entre os gradientes:

$$\Delta u = \nabla u^{REC} - \nabla u^{MEF}. \quad (104)$$

Aplicando a Eq. (100) à Eq. (104) obtém-se

$$\Delta u = \mathbf{B}_{\nabla u}^{REC} \mathbf{P} - \nabla u^{MEF} = \begin{bmatrix} (B_0^x - \nabla u_x^{MEF}) & B_1^x & B_2^x \\ (B_0^y - \nabla u_y^{MEF}) & B_1^y & B_2^y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{\nabla u} \mathbf{P}, \quad (105)$$

onde $\mathbf{B}_{\nabla u}$ é a matriz com os coeficientes do campo linear resultante da diferença entre os gradientes. Assim, a função U pode ser posta como

$$U(x, y) = \Delta u^T \mathbf{k} \, \Delta u = \mathbf{P}^T \mathbf{B}_{\nabla u}^T \mathbf{k} \mathbf{B}_{\nabla u} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{Z} \mathbf{P}, \quad (106)$$

onde \mathbf{Z} é uma matriz simétrica definida pelo produto $\mathbf{Z} = \mathbf{B}_{\nabla u}^T \mathbf{k} \mathbf{B}_{\nabla u}$ e cuja expansão resulta em

$$U(x, y) = U_0 + \mathbf{G}x + x^T \mathbf{H}x, \quad (107)$$

sendo U_0 um termo escalar e constante, \mathbf{G} um vetor contendo os coeficientes do termo linear e \mathbf{H} a matriz Hessiana associada ao termo quadrático da função densidade do erro.

Nota-se que a Eq. (107) expressa U para o problema de Poisson, sendo esta análoga a função densidade do erro em energia (\tilde{U}) obtida na Eq. (69) para problemas de OETC. A aplicação da Eq. (107) a Eq. (103) resulta em

$$E_{new}^2 = h^2 \left[\alpha U_0 + \beta \text{tr}(\mathbf{H}) h^2 \right]. \quad (108)$$

A definição da norma do erro em energia aplicada ao elemento conforme a Eq. (108) permite, a partir da definição de um problema de otimização (maximizar o tamanho do elemento restrito ao erro admissível), encontrar o tamanho ótimo do novo elemento. A solução deste problema via Método dos Multiplicadores de Lagrange é dada por

$$h_{new} = \left(\frac{\sqrt{(\alpha U_0)^2 + 4\beta \text{tr}(\mathbf{H}) \bar{e}^2} - \alpha U_0}{2\beta \text{tr}(\mathbf{H})} \right)^{1/2}. \quad (109)$$

Quanto à aplicação da técnica IEDR em problemas escalares, percebe-se que a principal diferença em relação aos problemas de OETC (neste caso, um problema vetorial) é a definição da função densidade do erro. Desta forma, especificada a construção dessa função (Eq. (107)) e a solução analítica do problema de otimização (Eq. (109)), a busca do tamanho do novo elemento é posta por um processo iterativo como o descrito na Seção 4.2.

5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS H-ADAPTATIVO ANISOTRÓPICO: RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ANISOTRÓPICO

Este Capítulo apresenta uma nova técnica h-adaptativa anisotrópica, aqui denominada por Recuperação da Densidade do Erro Anisotrópica (*Anisotropic Error Density Recovery* – AEDR). Esta técnica constitui uma das principais contribuições deste trabalho. Na Seção 5.1 é descrito o indicador de erro anisotrópico utilizado para guiar a metodologia adaptativa. Na Seção 5.2 a formulação da técnica AEDR é desenvolvida para problemas de OETC e, na Seção 5.3, para problemas escalares elípticos de segunda ordem com propriedades constantes.

5.1 INDICADOR DE ERRO ANISOTRÓPICO

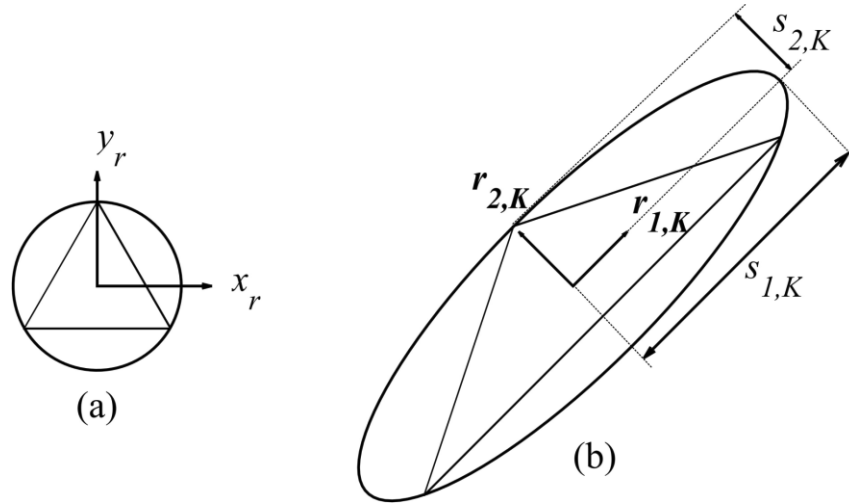
5.1.1 Definição dos parâmetros anisotrópicos de uma malha de elementos finitos

Para a descrição do indicador de erro proposto, inicialmente faz-se necessário definir as características anisotrópicas de uma malha composta por elementos finitos triangulares. Aqui, estas características (FIGURA 8) são determinadas de acordo com as definições apresentadas nos trabalhos de Formaggia e Perotto (2001, 2003) e Picasso (2003a, 2003b, 2006).

Assim, considera-se uma transformação linear de coordenadas $T_K : K_r \rightarrow K$, definida entre um triângulo de referência equilátero, K_r , (FIGURA 8(a)) e um triângulo qualquer e isósceles, K , (FIGURA 8(b)). O círculo de raio unitário (em K_r) é mapeado em uma elipse com direções representadas pelos vetores colunas $\mathbf{r}_{1,K}$ e $\mathbf{r}_{2,K}$, cujas amplitudes de esticamentos são $s_{1,K}$ e $s_{2,K}$. Deste modo, são definidos o tensor Jacobiano, \mathbf{J}_K , e o vetor translação \mathbf{t}_k que possibilita relacionar um ponto qualquer, \mathbf{x} , pertencente à elipse com um único ponto, \mathbf{x}_r , no domínio circular de referência, como

$$\mathbf{x} = T_K(\mathbf{x}_r) = \mathbf{J}_K \mathbf{x}_r + \mathbf{t}_k. \quad (110)$$

FIGURA 8 – REPRESENTAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS ANISOTRÓPICAS DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS: (a) K_r É UM TRIÂNGULO DE REFERÊNCIA EQUILÁTERO. (b) K É UM TRIÂNGULO GENÉRICO ISÓSCELES.



FONTE: Adaptado de Picasso (2003b).

Neste caso, como \mathbf{J}_K é inversível, pode-se realizar a decomposição de valor singular na forma $\mathbf{J}_K = \mathbf{R}_K^T \mathbf{s}_K \mathbf{P}_K$, onde \mathbf{R}_K e \mathbf{P}_K são matrizes ortogonais e onde \mathbf{s}_K é uma matriz diagonal com entradas positivas. Assim, tem-se

$$\mathbf{s}_K = \begin{bmatrix} s_{1,K} & 0 \\ 0 & s_{2,K} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{R}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1,K}^T \\ \mathbf{r}_{2,K}^T \end{bmatrix}, \quad (111)$$

onde adota-se $s_{1,K} \geq s_{2,K}$. Uma medida clássica do grau de distorção de um elemento é dada pela razão de aspecto, ar , posta como (PICASSO, 2006)

$$ar = s_{1,K} / s_{2,K}. \quad (112)$$

Fundamentados nestas definições, é possível descrever o indicador de erro anisotrópico proposto.

5.1.2 Indicador de erro anisotrópico baseado na recuperação de derivadas de primeira ordem

O indicador de erro aqui apresentado, em analogia com a técnica IEDR, é baseado na construção da função densidade do erro, dada a partir da norma do erro em energia

(ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987). Porém, este deve considerar as informações das direções ($\mathbf{r}_{1,K}$ e $\mathbf{r}_{2,K}$) e dimensões ($s_{1,K}$ e $s_{2,K}$) dos elementos. Basicamente, este indicador de erro busca explorar a simplicidade dos estimadores de erro *a posteriori* baseados em recuperação (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987, 1992a, 1992b). Para tal, está ancorado no fato de que, na literatura, são encontrados ótimos índices de efetividade para esta classe de estimadores considerando problemas elípticos de segunda ordem e malhas anisotrópicas (PICASSO, 2003b; CAO, 2014, 2015).

Inicialmente, considera-se um problema elíptico do tipo Poisson (Eq. (93)) e admite-se a definição da função densidade do erro em energia U , conforme Eq. (107). Neste ponto, cabe ressaltar que $U(x, y)$ é definida originalmente em um sistema de coordenadas relativas tendo como origem o baricentro do elemento e as direções Cartesianas ($x - y$). Assim, com o intuito de avaliar a função U com base nas características anisotrópicas dos elementos, realiza-se uma transformação de coordenadas para o sistema ($\hat{x} - \hat{y}$) utilizando a matriz de rotações \mathbf{R}_K definida na Eq. (111), ou seja, $\mathbf{x} = \mathbf{R}_K \hat{\mathbf{x}}$. Portanto, a nova expressão para a função densidade do erro é dada por

$$\hat{U} = U(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{U}_0 + \mathbf{G}\mathbf{R}_K \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}_K^T \mathbf{H}\mathbf{R}_K \hat{\mathbf{x}} = \hat{U}_0 + \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{x}}, \quad (113)$$

onde $\hat{U}_0 = U_0$, $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G}\mathbf{R}_K$ e $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{R}_K^T \mathbf{H}\mathbf{R}_K$. Explicitamente, é possível reescrever a Eq. (113) na sua forma escalar como

$$\hat{U}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{U}_0 + (\hat{G}_1 \hat{x} + \hat{G}_2 \hat{y}) + (\hat{H}_{11} \hat{x}^2 + 2\hat{H}_{12} \hat{x}\hat{y} + \hat{H}_{22} \hat{y}^2). \quad (114)$$

Assim, o indicador de erro anisotrópico, I_K^A , considerando o K -ésimo elemento, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} (I_K^A)^2 &= \int_{\Omega_K} \hat{U} d\Omega = \int_{\Omega_K} \left[\hat{U}_0 + (\hat{G}_1 \hat{x} + \hat{G}_2 \hat{y}) + (\hat{H}_{11} \hat{x}^2 + 2\hat{H}_{12} \hat{x}\hat{y} + \hat{H}_{22} \hat{y}^2) \right] d\Omega \\ &= \hat{U}_0 \int_{\Omega_K} d\Omega + \hat{G}_1 \int_{\Omega_K} \hat{x} d\Omega + \hat{G}_2 \int_{\Omega_K} \hat{y} d\Omega + \hat{H}_{11} \int_{\Omega_K} \hat{x}^2 d\Omega + 2\hat{H}_{12} \int_{\Omega_K} \hat{x}\hat{y} d\Omega + \hat{H}_{22} \int_{\Omega_K} \hat{y}^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (115)$$

A análise da Eq. (115), de acordo com a geometria da elipse orientada de acordo com o sistema de coordenadas $(\hat{x} - \hat{y})$, revela que o segundo, terceiro e quinto termos integrais são iguais a zero. Assim, a Eq. (115) pode ser simplificada por

$$(I_K^A)^2 = \hat{U}_0 \hat{A}_K + \hat{H}_{11} \hat{I}_{K_y} + \hat{H}_{22} \hat{I}_{K_x}, \quad (116)$$

onde $\hat{A}_K = \pi s_{1,K} s_{2,K}$ representa a área da elipse e $\hat{I}_{K_x} = (\pi/4) s_{1,K} s_{2,K}^3$ e $\hat{I}_{K_y} = (\pi/4) s_{1,K}^3 s_{2,K}$ são, respectivamente, os momentos de área de segunda ordem em relação a \hat{x} e \hat{y} . Em notação vetorial, pode-se reescrever a Eq. (116) como

$$I_K^A = \left(\hat{I}_{K_x} \left[\frac{4\hat{U}_0}{s_{2,K}^2} + \frac{s_{1,K}^2}{s_{2,K}^2} (\mathbf{r}_{1,K}^T \mathbf{H} \mathbf{r}_{1,K}) + (\mathbf{r}_{2,K}^T \mathbf{H} \mathbf{r}_{2,K}) \right] \right)^{1/2}. \quad (117)$$

Neste caso, o erro global na malha de elementos finitos, I^A , é dado por

$$I^A = \left(\sum_{K=1}^{NEI} (I_K^A)^2 \right)^{1/2}. \quad (118)$$

Destaca-se o fato do indicador de erro I^A ser construído com base na forma completa da função densidade do erro e depender unicamente da recuperação das derivadas de primeira ordem da solução. Por outro lado, na literatura, frequentemente a recuperação das derivadas de segunda ordem é necessária (BORGES et al., 1998).

5.1.3 Fundamentação matemática do indicador de erro anisotrópico

Nesta Subseção tem-se como objetivo mostrar a existência de um limite superior para o erro de discretização na malha, posto em função do indicador de erro elementar I_K^A . Para tal, inicialmente é descrita a Proposição 1, utilizada em vários trabalhos (MICHELETTI; PEROTTO; PICASSO, 2003; PICASSO, 2003b) e apresentada como:

Preposição 1

Seja $I_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$ um operador interpolante de Clément ou Scott-Zhang, onde V_h representa o espaço de funções lineares e contínuas por partes, usualmente utilizadas no MEF. Então, existe uma constante $C = C(K_r)$ tal que, para todo $v_e \in H^1(\Omega)$, para todo triângulo K pertencente à malha, tem-se

$$\|\nabla(v_e - I_h v_e)\|_{L^2(K)} \leq \bar{L}_K = C \left[\frac{s_{1,K}^2}{s_{2,K}^2} (\mathbf{r}_{1,K}^T \mathbf{G}_K(v_e) \mathbf{r}_{1,K}) + (\mathbf{r}_{2,K}^T \mathbf{G}_K(v_e) \mathbf{r}_{2,K}) \right]^{1/2}. \quad (119)$$

Na Preposição 1, \bar{L}_K indica um limite superior para a norma em análise, $s_{i,K}$ e $\mathbf{r}_{i,K}$ (com $i = 1$ ou 2) são definidos na Subseção 5.1.1 e $\mathbf{G}_K(v_e)$ é uma matriz simétrica definida como

$$\mathbf{G}_K(v_e) = \sum_{\Omega_K \in \Delta_K} \begin{bmatrix} \int_{\Omega_K} \left(\frac{\partial v_e}{\partial x} \right)^2 d\Omega & \int_{\Omega_K} \frac{\partial v_e}{\partial x} \frac{\partial v_e}{\partial y} d\Omega \\ \int_{\Omega_K} \frac{\partial v_e}{\partial x} \frac{\partial v_e}{\partial y} d\Omega & \int_{\Omega_K} \left(\frac{\partial v_e}{\partial y} \right)^2 d\Omega \end{bmatrix}, \quad (120)$$

onde Δ_K representa o padrão de elementos que possuem pelo menos um vértice em comum com o elemento K .

A comparação entre a Preposição 1 e o indicador de erro proposto na Eq. (117), permite assumir que

$$\|\nabla(v_e - I_h v_e)\|_{L^2(K)} \leq \bar{L}_K \leq I_K^A = C \left[\frac{4\hat{U}_0}{s_{2,K}^2} + \frac{s_{1,K}^2}{s_{2,K}^2} (\mathbf{r}_{1,K}^T \mathbf{H} \mathbf{r}_{1,K}) + (\mathbf{r}_{2,K}^T \mathbf{H} \mathbf{r}_{2,K}) \right]^{1/2}, \quad (121)$$

sendo $C = C(K_r) = \sqrt{\hat{I}_{K_x}}$, $v_e = u - u^{MEF}$, \mathbf{H} uma aproximação para \mathbf{G}_K baseada unicamente na recuperação das derivadas de primeira ordem e $(4\hat{U}_0/s_{2,K}^2) \geq 0$. Note-se que I_K^A expressa

um limite superior para os erros de discretização no gradiente da solução, medidos de acordo com a norma L^2 .

5.1.4 Redução para o caso isotrópico

Considerando um triângulo equilátero, contido em uma circunferência de raio r (neste caso, $r = s_{l,K} = s_{2,K}$), pode-se escrever a versão isotrópica a nível elementar, denotada I_K^I , do indicador de erro I_K^A (Eq. (117)) como

$$I_K^I = \left(\frac{\pi r^4}{4} \left[\frac{4\hat{U}_0}{r^2} + (\mathbf{r}_{l,K}^T \mathbf{H} \mathbf{r}_{l,K}) + (\mathbf{r}_{2,K}^T \mathbf{H} \mathbf{r}_{2,K}) \right] \right)^{1/2}, \quad (122)$$

a qual pode ser reescrita na forma

$$I_K^I = \left(A_c \left[U_0 + \frac{r^2}{4} \text{tr}(\mathbf{H}) \right] \right)^{1/2}, \text{ com } A_c = \pi r^2 / 4. \quad (123)$$

Cabe ressaltar que, considerando o caso isotrópico, tem-se que $\hat{U}_0 = U_0$ e $\text{tr}(\hat{\mathbf{H}}) = \text{tr}(\mathbf{H})$.

Portanto, I_K^I é o mesmo indicador de erro utilizado por Gonçalves (2016) e Pereira et al. (2016) para guiar um processo h-adaptativo, sendo este uma simplificação do caso anisotrópico. Este fato, acrescido da existência de um limite superior, realça a consistência do indicador I_K^A proposto anteriormente.

5.2 RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ANISOTRÓPICO – AEDR: APLICAÇÃO EM OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A técnica AEDR foi introduzida por Pereira e Silva (2017) no âmbito de problemas elípticos escalares bidimensionais. Com base nesse trabalho, nesta Seção, a técnica AEDR é estendida para problemas de OETC. De um modo geral, esta técnica pode ser vista como uma extensão do método de refino isotrópico IEDR, discutido no Capítulo 4.

Em analogia com as técnicas QER (PEREIRA; SILVA; GONÇALVES, 2016; GONÇALVES, 2016) e IEDR (SILVA; PEREIRA, 2017), o método de refino anisotrópico proposto também está ancorado na construção da função densidade do erro em energia e na solução analítica de um problema de otimização. A ideia central é construir uma malha onde o erro de aproximação seja limitado e igualmente distribuído. Para tal, busca-se um novo triângulo, orientado e não necessariamente equilátero, centrado no baricentro do elemento antigo e que, em seu interior, a norma do erro em energia seja igual ao erro admissível previamente estabelecido ($\bar{\epsilon}$).

5.2.1 Cálculo do erro total em uma região elíptica qualquer no entorno de um elemento

Inicialmente, é necessário definir uma expressão que permita obter o erro em energia para uma região elíptica qualquer com origem no baricentro de um elemento. Assim, espera-se gerar um novo elemento cuja área seja aproximadamente igual à área de uma elipse centrada na origem e, em cujo interior, o erro seja igual ao erro admissível. Parte-se da premissa que esta elipse possui suas direções principais iguais aos autovetores da matriz Hessiana $\tilde{\mathbf{H}}$ (Eq. (72)). Além disso, a e b são definidos, respectivamente, como o maior e menor diâmetros e FS é o fator de alongamento, os quais são relacionados por

$$FS = a/b. \quad (124)$$

Embora já definidos, estes parâmetros necessitam ser obtidos. O equacionamento da técnica AEDR está vinculado à aplicação do Teorema dos Eixos Principais (ANTOS; RORRES, 2010) à função densidade do erro em energia \tilde{U} (Eq. (69)). Assim, tendo como base o fato da matriz Hessiana do erro ($\tilde{\mathbf{H}}$) ser uma matriz real e simétrica $d \times d$, pode-se utilizar uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a forma quadrática $\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{x}$ na forma quadrática $\mathbf{x}'^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{x}'$ sem termos mistos, onde $\boldsymbol{\lambda}$ é a matriz diagonal com os autovalores λ_1 e λ_2 (com $\lambda_2 \geq \lambda_1$) de $\tilde{\mathbf{H}}$.

Dessa maneira, se \mathbf{R} (matriz ortogonal contendo os autovetores associados às direções principais de $\tilde{\mathbf{H}}$) diagonaliza $\tilde{\mathbf{H}}$ ortogonalmente, então a mudança de variáveis $\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{x}'$ transforma a forma quadrática $\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{x}$ na forma quadrática

$\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{x}' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$. Assim, a nova expressão para a densidade do erro em energia (\tilde{U}') pode ser posta como

$$\begin{aligned} \tilde{U}' &= \tilde{U}'(\mathbf{x}') = \tilde{U}_0 + \tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{R} \mathbf{x}' + \mathbf{x}'^T \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{R} \mathbf{x}', \\ &= \tilde{U}_0 + \tilde{\mathbf{G}}'^T \mathbf{x}' + \mathbf{x}'^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{x}', \\ &= \tilde{U}_0 + (\tilde{G}'_x x' + \tilde{G}'_y y') + (\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2). \end{aligned} \quad (125)$$

Partindo da definição da função densidade do erro em energia em um sistema local de coordenadas centrado no centroide do elemento (Eq. (125)), o erro total em uma elipse de diâmetros a e b (E_{elip}), centrada no mesmo ponto e orientada segundo as direções ($x' - y'$) (FIGURA 9), é dado por

$$\begin{aligned} E_{elip}^2 &= \int_{elip} \tilde{U}' d\Omega = \int_{elip} \left[\tilde{U}_0 + (\tilde{G}'_x x' + \tilde{G}'_y y') + (\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2) \right] d\Omega \\ &= \tilde{U}_0 \int_{elip} d\Omega + \tilde{G}'_x \int_{elip} x' d\Omega + \tilde{G}'_y \int_{elip} y' d\Omega + \lambda_1 \int_{elip} x'^2 d\Omega + \lambda_2 \int_{elip} y'^2 d\Omega \\ &= \tilde{U}_0 A_{elip} + \lambda_1 I_{y'} + \lambda_2 I_{x'}, \end{aligned} \quad (126)$$

onde A_{elip} é a área da elipse ($A_{elip} = \pi ab/4$) e $I_{x'}$ e $I_{y'}$ são, respectivamente, os momentos de inércia de área de segunda ordem em relação aos eixos x' e y' , dados por

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \pi ab^3/64 = A_{elip} b^2/16, \\ I_{y'} &= \pi a^3 b/64 = A_{elip} a^2/16. \end{aligned} \quad (127)$$

5.2.2 Projeto do elemento anisotrópico através de um problema de otimização

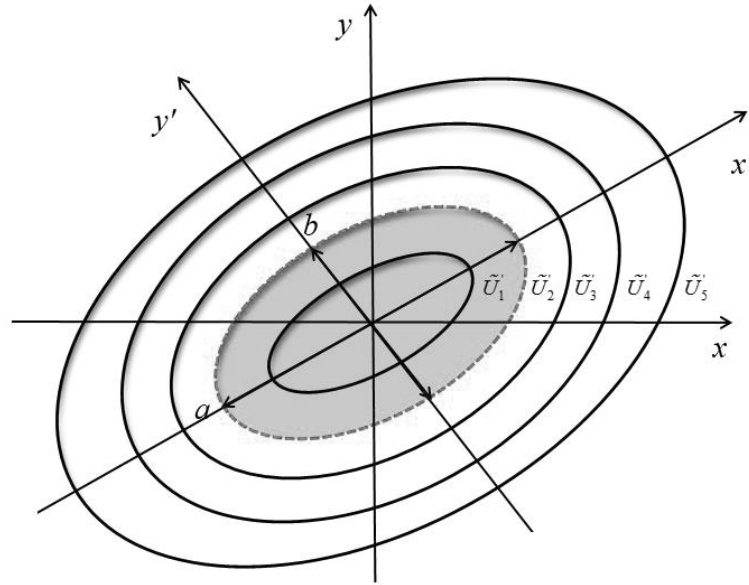
Uma alternativa viável para a determinação do tamanho ótimo do novo elemento é a utilização de técnicas de otimização. Neste caso, um problema de otimização, cuja função objetivo é maximizar a área da elipse centrada no elemento, mas restrito a $E_{elip}^2 \leq \bar{e}^2$ (FIGURA 9). Este problema pode ser posto na forma padrão como

$$P_{elip} : \begin{cases} \text{minimizar} & -A_{elip} = -\pi ab/4 \\ \text{Restrição :} & g_{elip}(a,b) \leq 0 \end{cases}, \quad (128)$$

onde $g_{elip}(a,b)$ é a função restrição relacionada ao erro total no elemento, dada por

$$g_{elip}(a,b) = E_{elip}^2 - \bar{e}^2 = \frac{\pi ab}{4} \left[\tilde{U}_0 + \frac{a^2}{16} \lambda_1 + \frac{b^2}{16} \lambda_2 \right] - \bar{e}^2 \leq 0. \quad (129)$$

FIGURA 9 – ELIPSE ÓTIMA COM ÁREA LIMITADA PELA FUNÇÃO DENSIDADE DO ERRO EM ENERGIA.



FONTE: Adaptado de Pereira e Silva (2017).

Empregando o método dos Multiplicadores de Lagrange, o problema P_{elip} (Eq. (128)) pode ser posto, em uma forma equivalente, como

$$P_{elip} : \left\{ \min_{\lambda^*, a, b} L_{elip}(\lambda^*, a, b), \right. \quad (130)$$

sendo a função Lagrangeano ($L_{elip} = L_{elip}(\lambda^*, a, b)$) dependente do maior (a) e menor (b) diâmetros da elipse e do multiplicador de Lagrange (λ^*) e, expressa como

$$L_{elip}(\lambda^*, a, b) = -\frac{\pi ab}{4} + \lambda^* g_{elip}(a, b) = -\frac{\pi ab}{4} + \lambda^* \left[\frac{\pi ab}{4} \left(\tilde{U}_0 + \frac{a^2}{16} \lambda_1 + \frac{b^2}{16} \lambda_2 \right) - \bar{e}^2 \right]. \quad (131)$$

Assim, os parâmetros anisotrópicos (a e b) ótimos, podem ser obtidos através da aplicação das condições necessárias de primeira ordem à função Lagrangeano, as quais são dadas por:

$$\frac{\partial L_{elip}}{\partial a} = \frac{\pi b}{4} \left[-1 + \lambda^* \left(\tilde{U}_0 + \frac{3}{16} a^2 \lambda_1 + \frac{b^2}{16} \lambda_2 \right) \right] = 0, \quad (132)$$

$$\frac{\partial L_{elip}}{\partial b} = \frac{\pi a}{4} \left[-1 + \lambda^* \left(\tilde{U}_0 + \frac{1}{16} a^2 \lambda_1 + \frac{3}{16} b^2 \lambda_2 \right) \right] = 0, \quad (133)$$

$$\frac{\partial L_{elip}}{\partial \lambda^*} = \frac{\pi ab}{4} \left(\tilde{U}_0 + \frac{1}{16} a^2 \lambda_1 + \frac{1}{16} b^2 \lambda_2 \right) - \bar{e}^2 = 0. \quad (134)$$

Adicionalmente, supondo que λ^* , a e b sejam diferentes de zero, a manipulação simultânea da Eq.(132) e Eq.(133) permite a obtenção de uma relação entre os diâmetros da elipse e os autovalores da matriz Hessiana, dada por

$$\left(\frac{a}{b} \right)^2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (135)$$

Assim, em conjunto com a Eq.(124), é possível definir o fator de alongamento FS como

$$FS = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad (136)$$

onde necessariamente $\lambda_2 \geq \lambda_1$. Em especial, caso $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ adota-se $\lambda_1 = \lambda_2 = (\lambda_1 \lambda_2)^{1/2}$. Outro possível cenário é dado por $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$, sendo definido neste caso $\lambda_1 = \min(|\lambda_1|, \lambda_2)$.

Dessa forma, encontrando um dos diâmetros da elipse, todos os parâmetros anisotrópicos para a caracterização da geometria (dimensões e orientação) do novo elemento podem ser definidos. Assim, como os diâmetros elípticos a e b devem satisfazer a condição de

erro limitado, a determinação do maior diâmetro (a) pode ser realizada substituindo o valor de b , a partir da Eq.(135), na Eq.(134), resultando em

$$\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} a^2 \left[\tilde{U}_0 + \frac{I}{8} a^2 \lambda_1 \right] - \bar{e}^2 = 0. \quad (137)$$

Reordenando a Eq.(137) tem-se

$$\lambda_1 a^4 + (8\tilde{U}_0) a^2 + \left(\frac{-32}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \bar{e}^2 \right) = 0. \quad (138)$$

Esta equação se constitui em uma equação do segundo grau na incógnita a^2 , cuja única raiz real e positiva para determinação do maior diâmetro elíptico pode ser escrita como

$$a = \left(\frac{I}{\lambda_1} \left[\sqrt{(4\tilde{U}_0)^2 + \frac{32}{\pi} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \bar{e}^2} - 4\tilde{U}_0 \right] \right)^{1/2}. \quad (139)$$

Com isso, o menor diâmetro elíptico b pode ser determinado através da Eq. (124).

5.2.3 Definição do tensor métrico no elemento

Para a geração da malha adaptada, há a necessidade da definição de um tensor métrico em cada elemento finito da malha. Este tensor, $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x, y)$, representa um mapeamento entre domínios onde, no domínio físico, o tamanho elementar em uma direção qualquer dada pelo vetor unitário \mathbf{n} (h_n) pode ser definido como (HETCH, 2006)

$$h_n^2(x, y) = \frac{I}{\mathbf{n}^T \mathbf{M} \mathbf{n}}. \quad (140)$$

Inicialmente, admite-se que a matriz ortogonal de rotações (\mathbf{R}) associada à matriz Hessiana do erro ($\tilde{\mathbf{H}}$), é formada pelos autovetores de $\tilde{\mathbf{H}}$, onde a primeira coluna

necessariamente represente a direção de menor variação da forma quadrática. Assim, para cada elemento, pode-se definir um tensor métrico \mathbf{M} como

$$\mathbf{M} = (\mathbf{R}) \mathbf{A} (\mathbf{R})^T, \quad (141)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz diagonal contendo as dimensões do elemento obtidas pela técnica AEDR e dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{bmatrix}. \quad (142)$$

Neste caso, sendo \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 , respectivamente, as direções unitárias de menor e maior variação da função densidade do erro em energia, pode-se escrever

$$a^2 = \frac{1}{\mathbf{n}_1^T \mathbf{M} \mathbf{n}_1} \quad e \quad b^2 = \frac{1}{\mathbf{n}_2^T \mathbf{M} \mathbf{n}_2}. \quad (143)$$

5.2.4 Definição da malha de parâmetros e geração da nova malha via gerador de malha BAMG

Nesse ponto, deve ser realçado que o tensor métrico \mathbf{M} , definido pela Eq. (141), refere-se a um elemento K qualquer. Essa informação é conflitante com o gerador de malhas BAMG (HETCH, 1998, 2006, 2012), utilizado nesta tese, o qual requer as definições de métrica para cada nó. Assim, tem-se uma importante questão em problemas de h-adaptatividade anisotrópica na qual, para uma dada região do espaço, são conhecidas diferentes métricas e o projeto da nova malha de elementos finitos se baseia em um único campo tensorial métrico. Assim, esta Subseção tem por objetivo a descrição de um processo que permita a determinação do tensor métrico para cada nó.

Inicialmente, são determinadas, para cada elemento K da malha corrente, as dimensões a e b e a matriz Hessiana do erro $\tilde{\mathbf{H}}$. Estas dimensões são atualizadas de forma a obter malhas adequadamente orientadas e que se adaptem progressivamente às características

do problema. Nesse caso, são impostas limitações sobre os parâmetros a e b , tendo como referência as dimensões da malha corrente, como:

$$\begin{aligned} (1/\bar{\alpha})2s_{1,K} &\leq a \leq (\bar{\alpha})2s_{1,K} \leq L_c, \\ (1/\bar{\alpha})2s_{2,K} &\leq b \leq (\bar{\alpha})2s_{2,K} \leq L_c, \end{aligned} \quad (144)$$

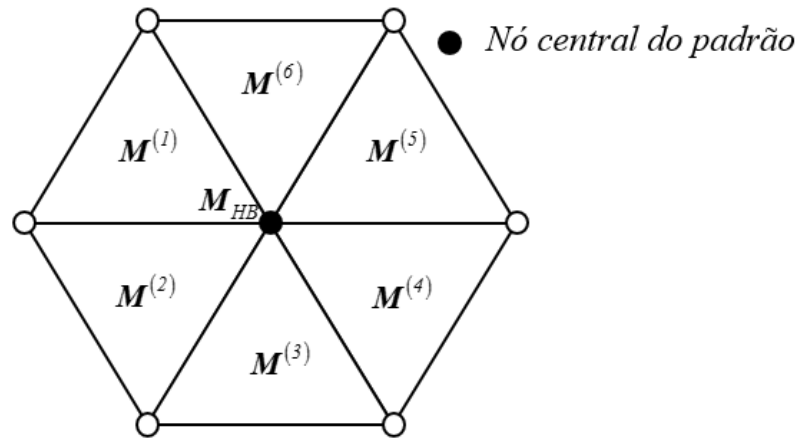
onde $\bar{\alpha}$ é um valor escalar arbitrado e L_c é uma medida característica do domínio do problema. Ademais, como forma de auxiliar no controle das distorções locais das malhas, FS pode ser restringido por um limite superior, FS_{max} . Esta limitação é posta de forma a obter uma área idêntica a estimada antes de sua aplicação e pode ser escrita como

$$\text{Se } FS > FS_{max}, \text{ então } a \rightarrow \left(\sqrt{\frac{FS_{max}}{FS}} \right) a \text{ e } b \rightarrow \left(\sqrt{\frac{FS}{FS_{max}}} \right) b. \quad (145)$$

Assim, uma métrica em cada elemento K da malha pode ser obtida através da Eq. (141).

Neste ponto, a completa definição da malha de parâmetros pode ser obtida respondendo a questão (FIGURA 10): Como obter a métrica associada ao nó central do padrão, sendo conhecidas as métricas em todos os elementos que compõem o padrão relacionado a esse nó?

FIGURA 10 – REPRESENTAÇÃO DO PROCESSO DE INTERSECÇÃO DE MÉTRICAS EM TORNO DE UM NÓ CENTRAL.



FONTE: Adaptado de Pereira e Silva (2017).

Com o objetivo de responder essa questão, é empregado o processo de intersecção de métricas proposto por Borouchaki et al. (1997), aqui denominado de intersecção de métricas

HB. Embora possam ser encontradas outras definições de intersecção de métricas na bibliografia (Castro-Diaz et al. (1997)), a intersecção de métricas HB se mostrou bastante eficiente para o corrente trabalho. Assim, a métrica intersecção define, para cada nó da malha, a orientação e as dimensões do novo elemento (BOROUCHAKI et al. (1997)).

5.2.4.1 Intersecção de métricas segundo Borouchaki et al. (1997)

Seja uma região do espaço onde são definidas duas métricas $\mathbf{M}^{(1)}$ e $\mathbf{M}^{(2)}$, as quais estão associadas a duas elipses. Busca-se uma métrica intersecção, aqui denotada \mathbf{M}_{HB} , que represente a intersecção dessas duas elipses iniciais. Para obter a métrica \mathbf{M}_{HB} , os autores utilizam o conceito de *redução simultânea* às duas métricas iniciais. Neste caso, considera-se uma matriz \mathbf{W} , dada por (BOROUCHAKI et al. (1997))

$$\mathbf{W} = \left(\mathbf{M}^{(1)} \right)^{-1} \mathbf{M}^{(2)} \quad (146)$$

e definem-se \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 como os autovetores associados às direções principais de \mathbf{W} , os quais formam uma base ortogonal no R^2 . Com isso, têm-se as condições:

$$\mathbf{d}_1^T \mathbf{M}^{(1)} \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_1^T \mathbf{M}^{(2)} \mathbf{d}_2 = 0. \quad (147)$$

Dessa forma, a métrica intersecção \mathbf{M}_{HB} pode ser definida como (BOROUCHAKI et al. (1997))

$$\mathbf{M}_{HB} = \left(\mathbf{R}_W^{-1} \right)^T \begin{bmatrix} \max(\phi_1, \tau_1) & 0 \\ 0 & \max(\phi_2, \tau_2) \end{bmatrix} \left(\mathbf{R}_W^{-1} \right), \quad (148)$$

onde \mathbf{R}_W representa a matriz dos autovetores de \mathbf{W} e ϕ_i e τ_i são definidos por

$$\phi_i = \mathbf{d}_i^T \mathbf{M}^{(1)} \mathbf{d}_i \quad e \quad \tau_i = \mathbf{d}_i^T \mathbf{M}^{(2)} \mathbf{d}_i, \text{ com } i = 1, 2. \quad (149)$$

Em um caso genérico, representado por um padrão em torno de um nó com um número total de NP métricas elementares $\mathbf{M}^{(K)}$ ($K = 3 \dots NP$, com $NP \geq 3$), a métrica de intersecção \mathbf{M}_{HB} é dada por

$$\mathbf{M}_{HB} = \text{intersecção}(\mathbf{M}_{HB}, \mathbf{M}^{(K)}). \quad (150)$$

Exemplos numéricos são apresentados no trabalho de Borouchaki, George e Mohammadi (1997) mostrando a funcionalidade do processo de intersecção para malhas anisotrópicas.

5.2.4.2 Fator de escalonamento h -adaptativo (γ)

Para uma malha adaptativa que deve satisfazer um erro prescrito, a proposta de obtenção de uma métrica intersecção \mathbf{M}_{HB} gera um elemento dimensionalmente menor ou igual a todos os elementos que compõem o padrão do nó. Com isso, a malha adaptada possuirá um erro abaixo do admissível. Assim, na busca por uma métrica que obtenha uma solução com um valor de erro o mais próximo do estipulado, é adotado um processo de escalonamento para o novo elemento.

O objetivo é encontrar um valor escalar (γ) que, multiplicado pela métrica nodal de intersecção \mathbf{M}_{HB} , fornece a área do novo elemento no interior do qual o erro se aproxime do erro admissível. Nesse contexto, uma alternativa é determinar γ , de tal forma que a área do novo elemento seja equivalente à área média (A_{med}) decorrente das métricas do padrão, neste caso, definida priorizando as menores áreas e expressa como

$$A_{med} = \left(\frac{1}{NP} \sum_{K=1}^{NP} \frac{1}{A_{elip}^{(K)}} \right)^{-1}, \quad (151)$$

com NP igual ao número de elementos do padrão. Além disso, para cada K -ésima métrica do padrão, $\mathbf{M}^{(K)}$, obtém-se a área elementar ($A_{elip}^{(K)}$) através da dimensão máxima (a) e mínima (b) como

$$\Omega_K : \mathbf{M}^{(K)} \rightarrow a, b \rightarrow A_{elip}^{(K)} = (\pi / 4) ab. \quad (152)$$

Avaliando a métrica de intersecção \mathbf{M}_{HB} e, definida a dimensão máxima (\bar{a}) e mínima (\bar{b}), calcula-se a área projetada pela intersecção para o nó, $\bar{A}_{elip} = (\pi / 4) \bar{a} \bar{b}$, a qual geralmente é diferente de A_{med} .

Dessa forma, o fator de escalonamento (γ) é definido através de uma relação entre A_{med} e \bar{A}_{elip} . Ademais, deve-se levar em consideração que as dimensões que formam cada métrica, no corrente trabalho, são originadas dos diâmetros de uma elipse. Assim, mantendo a razão de aspecto, e considerando que a área do novo elemento triangular deve ser igual à área da elipse projetada, o fator de escalonamento deve ser atualizado por um fator $(\pi / 2)$ e, portanto, dado por

$$\gamma^2 = (\pi / 2) (A_{med} / \bar{A}_{elip}). \quad (153)$$

Assim, a nova métrica da intersecção nodal associada ao nó P , \mathbf{M}_P , é posta como

$$\mathbf{M}_P = (1 / \gamma^2) \mathbf{M}_{HB}. \quad (154)$$

Através da completa definição de um campo de métricas nodais, a nova malha de elementos finitos pode ser construída através do gerador de malhas BAMG.

5.3 RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ANISOTRÓPICA – AEDR: APLICAÇÃO AO PROBLEMA DE POISSON

Considera-se o problema de valor de contorno definido pela equação de Poisson (Eq. (93)) e a construção da função densidade do erro em energia U estabelecida na Seção 4.3 pela Eq. (107). Neste caso, o desenvolvimento da técnica AEDR para esta classe de problemas segue o procedimento descrito na Seção 5.2. A principal diferença é que a transformação de coordenadas utilizada para transformar a função U em uma função quadrática sem termos cruzados, deve ser realizada pelos autovetores da matriz Hessiana \mathbf{H} , a qual considera as propriedades constantes. Além disso, a construção das métricas dos elementos também

deverão considerar os autovetores de \mathbf{H} . Para um detalhamento desta técnica aplicada ao problema de Poisson, pode-se consultar o trabalho de Pereira e Silva (2017).

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES: APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS IEDR E AEDR EM PROBLEMAS ELÍPTICOS

Este Capítulo discute a validação das técnicas IEDR e AEDR em problemas elípticos bidimensionais de segunda ordem. Na Seção 6.1 são apresentados os resultados para a técnica IEDR em comparação com duas técnicas h-adaptativas: Ch^p (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987) e LB (LI; BETTESS, 1995; LI et al., 1995). Na Seção 6.2 a técnica AEDR é validada, confrontando as curvas de convergência em relação a uma adaptação de malha isotrópica. Para todos os exemplos, a implementação computacional é realizada em ambiente Matlab®, sendo a geração das malhas efetuada pelo *software* BAMG (HECHT, 1998, 2006, 2012).

6.1 RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ISOTRÓPICA – IEDR: EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta Seção, a avaliação das técnicas h-adaptativas é realizada comparando cinco parâmetros: erro relativo em energia analítico em forma percentual (η), número de graus de liberdade (NGL), desvio dos parâmetros de refinamento (D_ζ), média simples dos parâmetros de refinamento (ζ_m) e máximo parâmetro de refinamento (ζ_{max}). Parâmetros de qualidade análogos a estes são avaliados nos trabalhos de Oñate e Bugeda (1993) e Silva (2015).

Denota-se aqui por parâmetro de refinamento, ζ_K , o clássico parâmetro proposto por Zienkiewicz e Zhu (1987) (Eq. (55)b). Posto isso, pode-se definir D_ζ , ζ_m e ζ_{max} como

$$D_\zeta = \sqrt{\frac{1}{NEl} \sum_{K=1}^{NEl} (\zeta_K - 1)^2}, \quad (155)$$

$$\zeta_m = \frac{1}{NEl} \sum_{K=1}^{NEl} \zeta_K \quad \text{e} \quad (156)$$

$$\zeta_{max} = \max(\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_{NEl}). \quad (157)$$

Percebe-se que, em uma malha ideal, considerando o critério de malha ótima de equidistribuição dos erros, é esperado que $\eta = \bar{\eta}$, $D_\zeta = 0$ e $\zeta_m = \zeta_{max} = 1$. Portanto, a partir

destes valores de referência, é possível concluir sobre a qualidade das malhas geradas por cada técnica h-adaptativa.

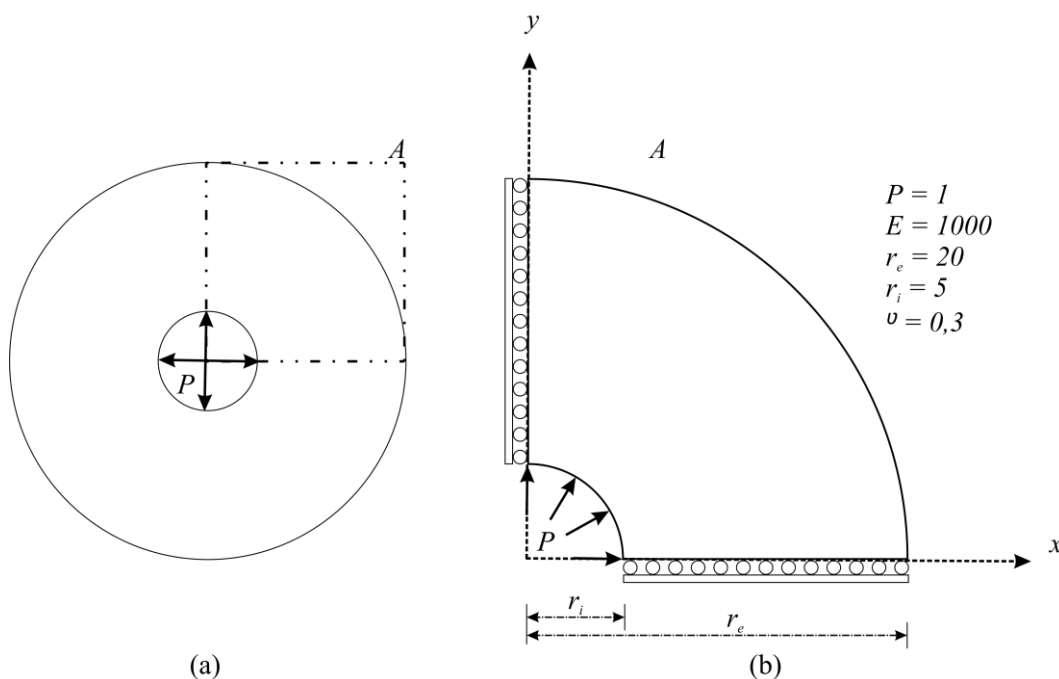
Além disso, para cada malha obtida, apresenta-se o índice de efetividade (θ^{ZZ}), de modo a quantificar a performance do estimador de erro utilizado como guia nas adaptações da malha. Nos exemplos analisados é empregada a técnica SPR (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992a, 1992b) para a recuperação dos gradientes da solução de MEF.

Ademais, nesta Seção são considerados dois exemplos: um relacionado ao problema escalar de Poisson e outro relativo ao problema vetorial de elasticidade plana. Em todos os problemas, é admitido um erro relativo percentual de 5% e utilizada uma constante de aceleração $\bar{C} = 0,95$ para todas as técnicas adaptativas. Também, são efetuadas três iterações adaptativas de modo a avaliar a estabilidade das técnicas.

6.1.1 Exemplo 1: Cilindro de parede espessa submetido a pressão interna

No corrente exemplo, as técnicas de refino são avaliadas frente ao problema de um cilindro de parede espessa submetido à pressão interna (FIGURA 11) (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987; OÑATE; BUGEDA, 1993; DÍEZ; HUERTA, 1999; RÓDENAS et al., 2007; DÍEZ; RÓDENAS; ZIENKIEWICZ, 2007).

FIGURA 11 – CILINDRO SUBMETIDO À PRESSÃO INTERNA.



FONTE: O autor (2017).

Devido à simetria apresentada em relação aos dois eixos cartesianos (FIGURA 11(a)), o modelo mecânico (FIGURA 11(b)) empregado é referente somente a um dos quadrantes. O exemplo em questão foi escolhido propositalmente, uma vez que problemas de otimização estrutural, geralmente, são sujeitos unicamente a cargas distribuídas ao longo do contorno.

Neste caso, a solução analítica é conhecida, podendo ser encontrada nos trabalhos de Ródenas et al. (2007) e Díez, Ródenas e Zienkiewicz (2007). Considerando um sistema de coordenadas polares e um estado plano de deformações, os deslocamentos radiais (u_r) e as componentes de tensões radiais (σ_r) e tangenciais (σ_t) podem ser escritas como:

$$u_r = \frac{P(1+\nu)}{E(t^2-1)} \left[(1-2\nu)r + \frac{r_e^2}{r} \right], \quad (158)$$

$$\sigma_r = \frac{P}{(t^2-1)} \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right) \quad \text{e} \quad \sigma_t = \frac{P}{(t^2-1)} \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right), \quad (159)$$

onde P é a pressão exercida na parede interna do cilindro, ν é o coeficiente de Poisson, E é o módulo de elasticidade longitudinal, t é razão entre o raio externo (r_e) e o interno (r_i) e r é o raio de um ponto qualquer a partir da origem e medido segundo um sistema de coordenadas cartesianas globais ($x - y$). Estes parâmetros possuem valores numéricos conforme apresentados na FIGURA 11. Dada a natureza numérica da discussão a ser conduzida não são apresentadas as unidades dessas grandezas, conforme assumido também nos demais trabalhos que tratam deste problema. Para a avaliação do índice de efetividade, torna-se útil a definição das componentes de tensões analíticas de acordo com o sistema de coordenadas cartesianas:

$$\sigma_{11} = \sigma_r \cos^2(\psi) + \sigma_t \sin^2(\psi), \quad (160)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_r \sin^2(\psi) + \sigma_t \cos^2(\psi) \quad \text{e} \quad (161)$$

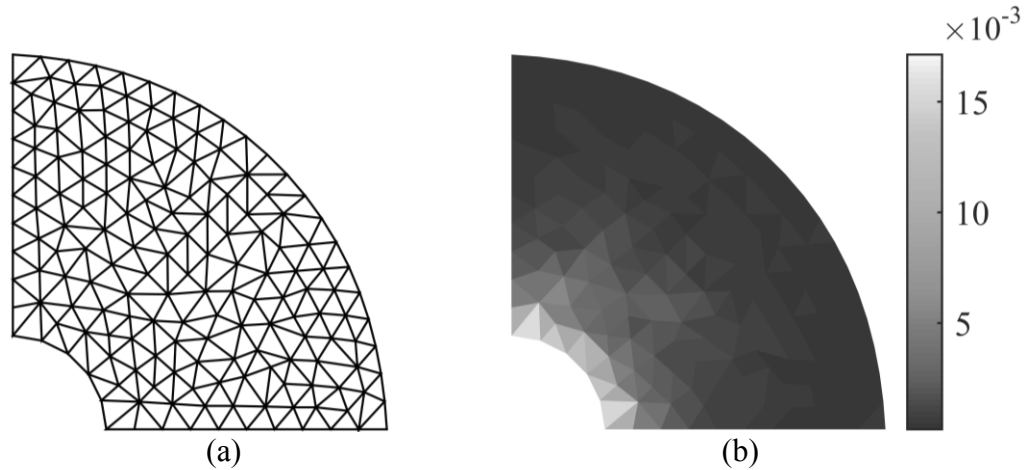
$$\tau_{12} = (\sigma_r - \sigma_t) \sin(\psi) \cos(\psi), \quad (162)$$

sendo $\psi = \tan^{-1}(y/x)$, o ângulo em relação ao eixo x medido no sentido anti-horário.

Todas as técnicas adaptativas iniciam com uma malha de elementos finitos quase uniforme (FIGURA 12(a)), composta por 294 elementos e erro relativo percentual de 20,28 %. A distribuição inicial dos erros em energia é apresentada na FIGURA 12(b). Os

parâmetros de qualidade da malha são expostos na TABELA 1 e representados em forma gráfica nas FIGURAS 13 e 14. A sequência de malhas adaptadas e suas respectivas distribuições de erros são apresentadas nas FIGURAS 15, 16 e 17.

FIGURA 12 – EXEMPLO 1: (a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS INICIAL. (b) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.

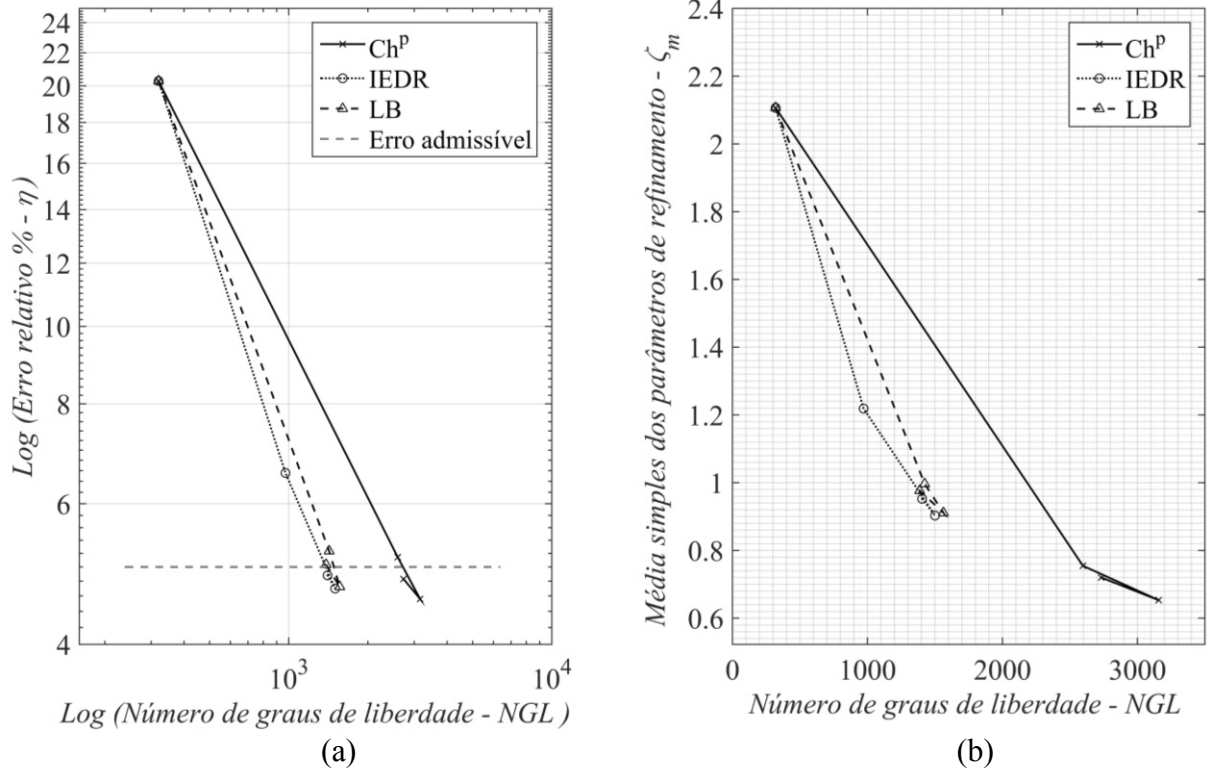


FONTE: O autor (2017).

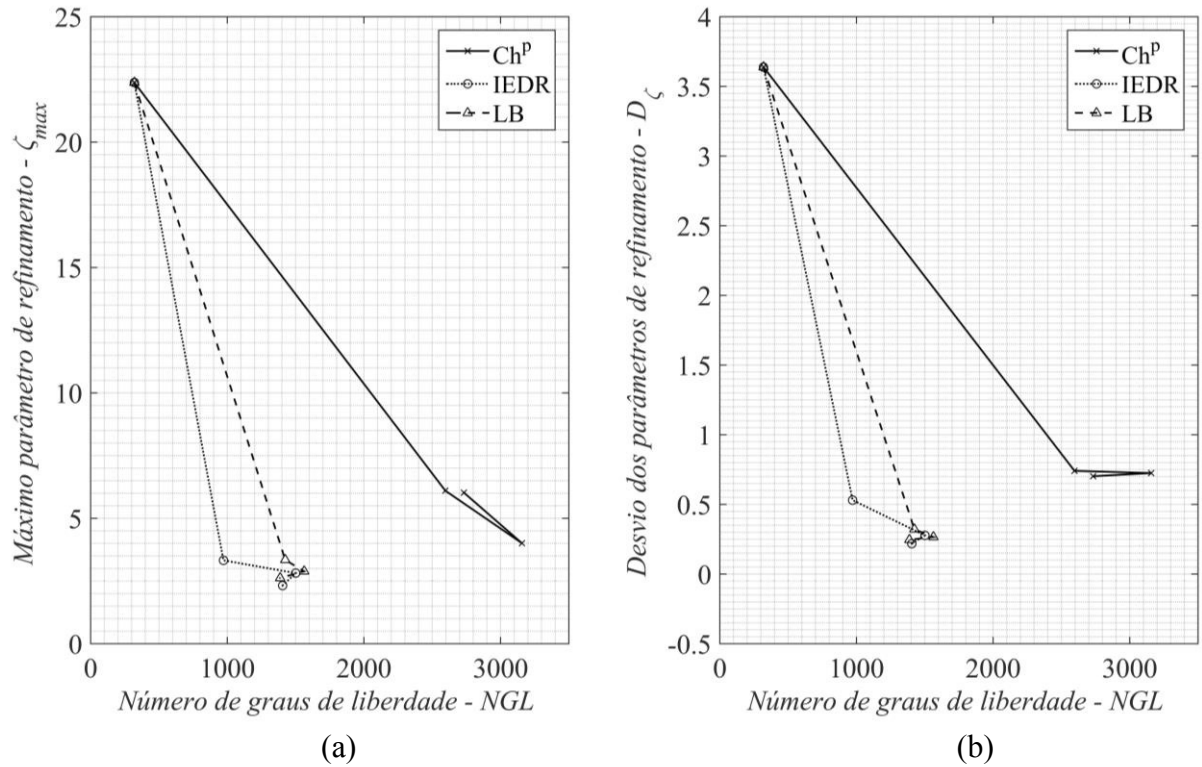
TABELA 1 – EXEMPLO 1: CILINDRO SUBMETIDO A PRESSÃO INTERNA – PARÂMETROS DE QUALIDADE DA MALHA.

		Malha de elementos finitos			
		Inicial	Adaptada 1	Adaptada 2	Adaptada 3
η	Ch^p	20,28	5,14	4,56	4,83
	IEDR	20,28	6,55	4,70	4,88
	LB	20,28	5,24	4,72	5,03
θ^{zz}	Ch^p	1,11	1,01	0,98	1,01
	IEDR	1,11	1,01	0,99	0,99
	LB	1,11	1,00	0,99	0,99
NGL	Ch^p	320	2596	3157	2732
	IEDR	320	972	1501	1405
	LB	320	1424	1563	1387
D_ζ	Ch^p	3,64	0,74	0,72	0,70
	IEDR	3,64	0,53	0,28	0,22
	LB	3,64	0,32	0,27	0,25
ζ_m	Ch^p	2,11	0,75	0,65	0,72
	IEDR	2,11	1,22	0,90	0,95
	LB	2,11	1,00	0,91	0,98
ζ_{max}	Ch^p	22,37	6,10	4,01	6,02
	IEDR	22,37	3,32	2,81	2,32
	LB	22,37	3,34	2,88	2,62

FONTE: O autor (2017).

FIGURA 13 – RESULTADOS PARA EXEMPLO 1: (a) $NGL \times \eta$. (b) $NGL \times \zeta_m$.

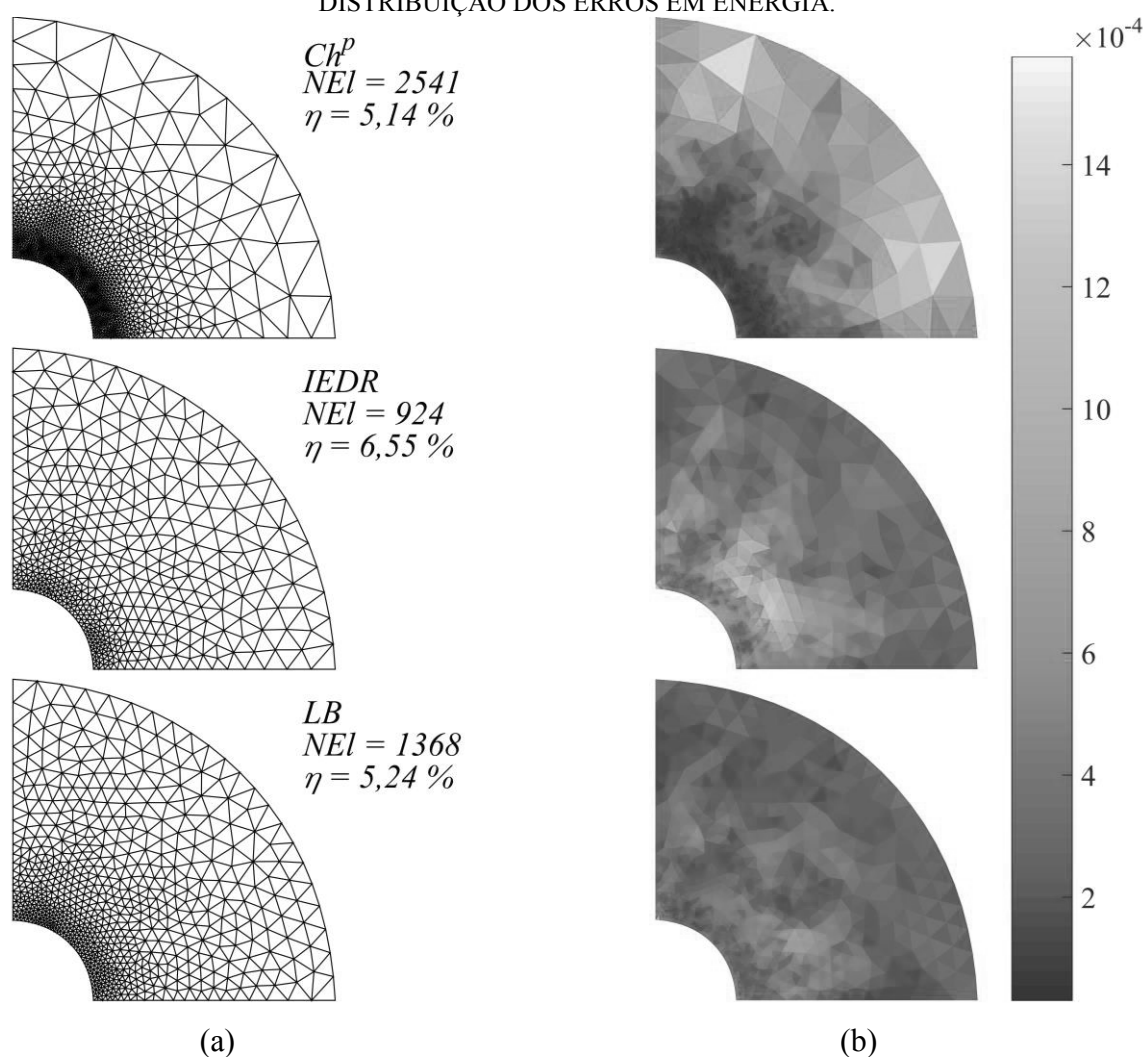
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 14 – RESULTADOS PARA EXEMPLO 1: (a) $NGL \times \zeta_{max}$. (b) $NGL \times D_\zeta$.

FONTE: O autor (2017).

Percebe-se que todas as técnicas se aproximam do valor de erro admissível (FIGURA 13(a)). Porém, algumas diferenças significativas podem ser elencadas quanto aos parâmetros de qualidade das malhas adaptadas. Corroborando com Oñate e Bugeda (1993), a técnica Ch^p , considerando o corrente problema, apresenta uma característica oscilatória na topologia das malhas geradas, ou seja, refino-desrefino-refino. (FIGURAS 15, 16 e 17). Com isso, a obtenção de uma malha com os erros igualmente distribuídos é dificultada, acarretando em parâmetros de qualidade que se afastam do ideal (TABELA 1 e FIGURAS 13 e 14).

FIGURA 15 – EXEMPLO 1, ITERAÇÃO ADAPTATIVA 1: (a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (b) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.



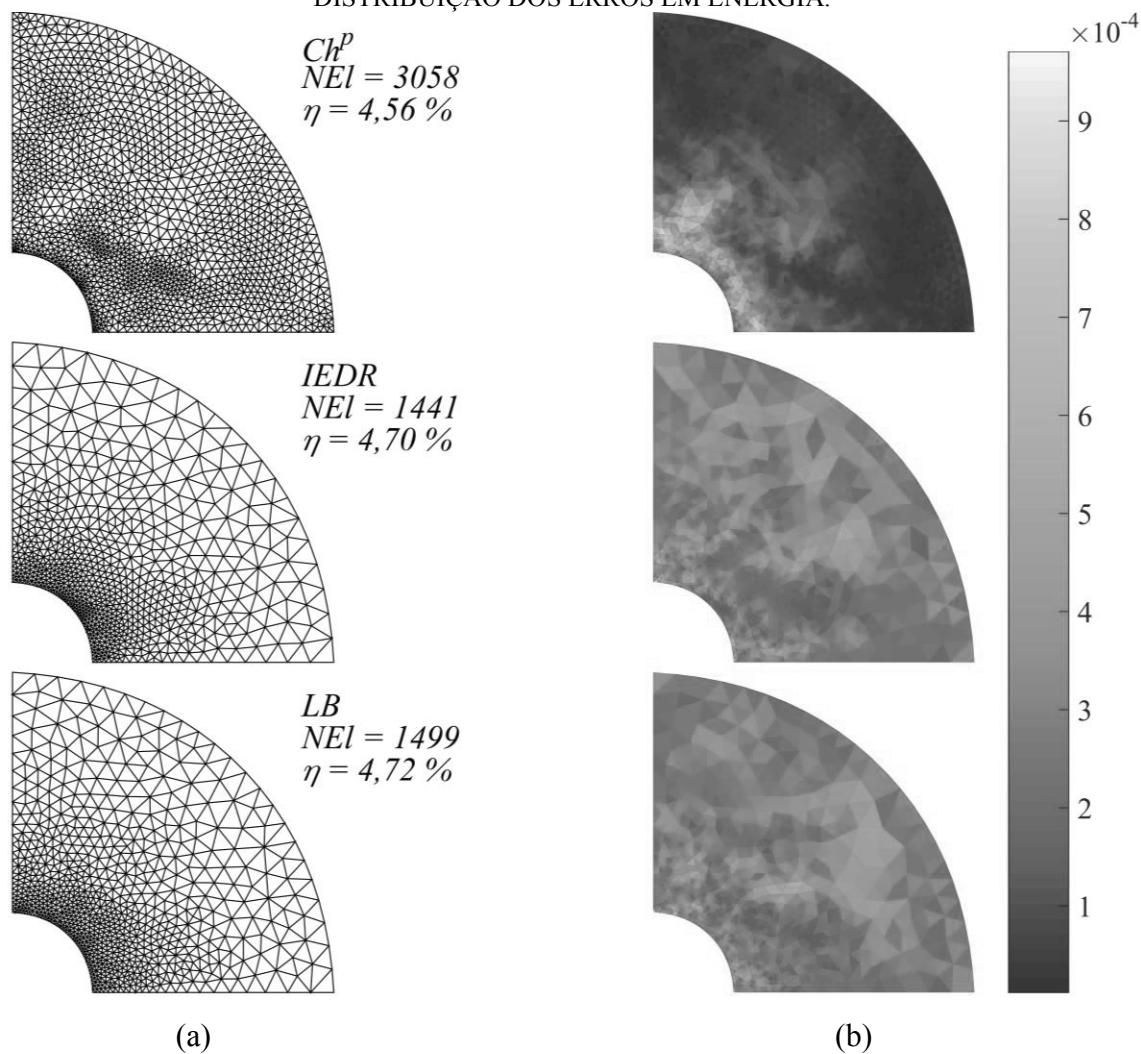
FONTE: O autor (2017).

Por outro lado, a aplicação das técnicas IEDR e LB conduzem a malhas convergentes com erros aproximadamente distribuídos (FIGURAS 15, 16 e 17) e com parâmetros de qualidade próximos do esperado (TABELA 1 e FIGURAS 13 e 14). Ou seja, um conjunto de parâmetros de refinamento com desvios (D_ζ) próximos a zero e médias (ζ_m) próximas a

unidade. Além disso, estes métodos se mostram estáveis (pouca oscilação no número de elementos e na configuração das malhas) e com um número de elementos significativamente inferior ao encontrado pela técnica Ch^p .

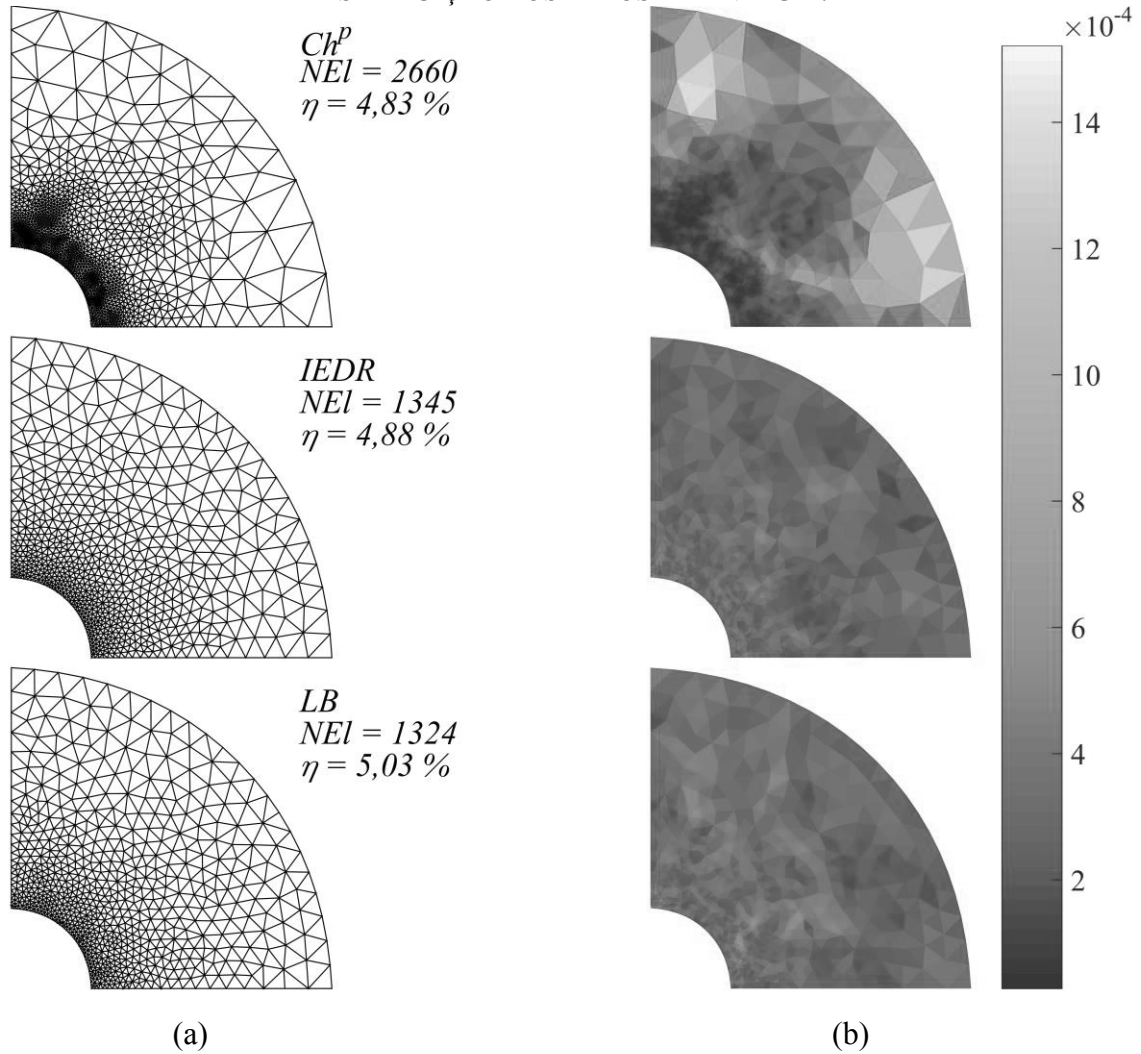
Ademais, em apenas duas iterações adaptativas, todas as técnicas atingiram a convergência ($\eta \leq \bar{\eta}$). Quanto à terceira iteração, observa-se a permanência de todas as técnicas próximas ao limite de erro estipulado e, para as técnicas IEDR e LB, identifica-se uma melhora nos parâmetros de qualidade da malha (TABELA 1). Ressaltam-se ainda, excelentes índices de efetividade considerando a técnica SPR para o elemento CST e problemas de elasticidade (TABELA 1).

FIGURA 16 – EXEMPLO 1, ITERAÇÃO ADAPTATIVA 2: (a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (b) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 17 – EXEMPLO 1, ITERAÇÃO ADAPTATIVA 3: (a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (b) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.



FONTE: O autor (2017).

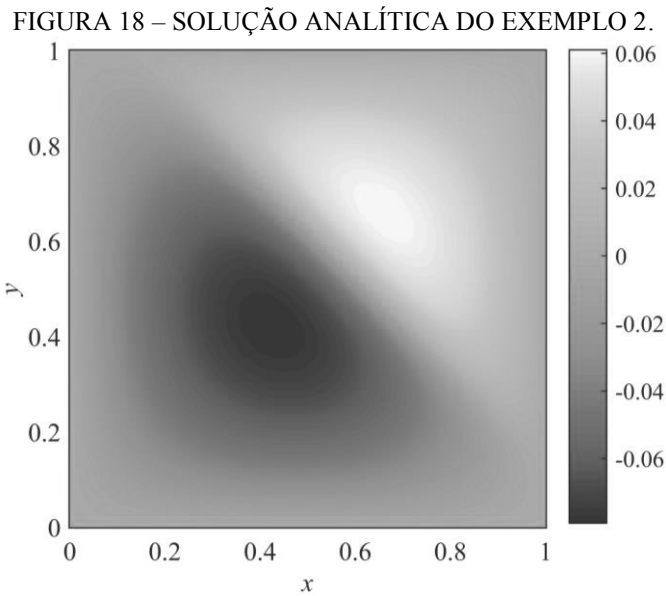
6.1.2 Exemplo 2: Problema de Poisson

O exemplo 2 permite avaliar as técnicas adaptativas considerando um problema escalar de Poisson. Assim, diferentemente do caso anterior, é possível verificar o comportamento da técnica IEDR quanto a problemas com excitações de domínio.

Considera-se aqui, um problema definido em um domínio $\Omega = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, submetido unicamente a condições de contorno de Dirichlet homogêneas, cuja solução analítica (FIGURA 18) é dada por (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992c; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000)

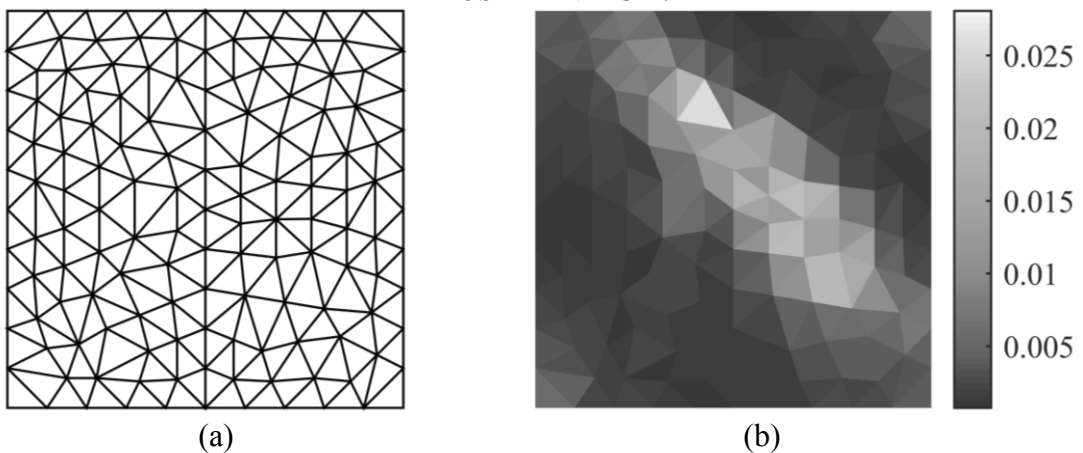
$$u(x, y) = x(1-x)y(1-y)tg^{-1}[\kappa(\delta - \delta_0)], \quad (163)$$

onde $\delta = (x+y)/\sqrt{2}$. Neste caso, a função escalar de excitação de domínio (f) pode ser obtida através de u e da definição do problema elíptico do tipo Poisson (Eq. (93)). A malha inicial de elementos finitos (244 elementos e erro relativo percentual de 33,68%) e sua distribuição de erros em energia são mostradas na FIGURA 19.



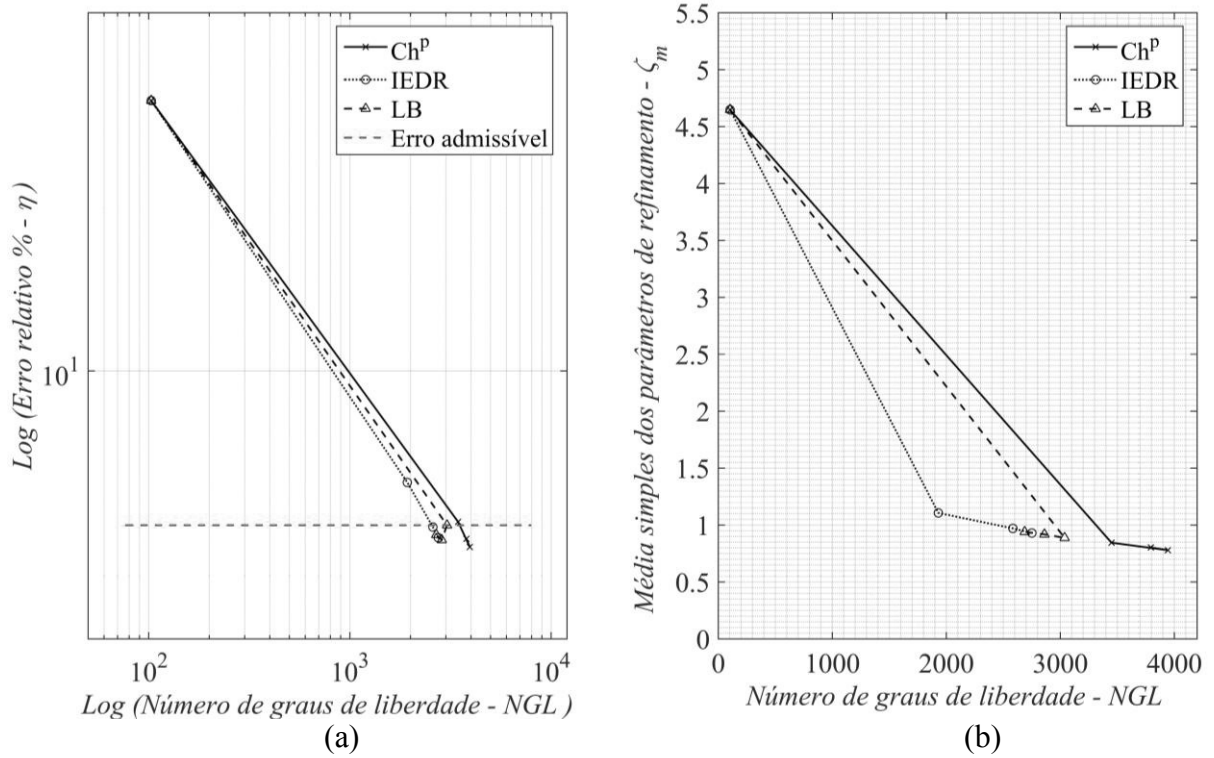
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 19 – EXEMPLO 2: (a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS INICIAL. (b) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.

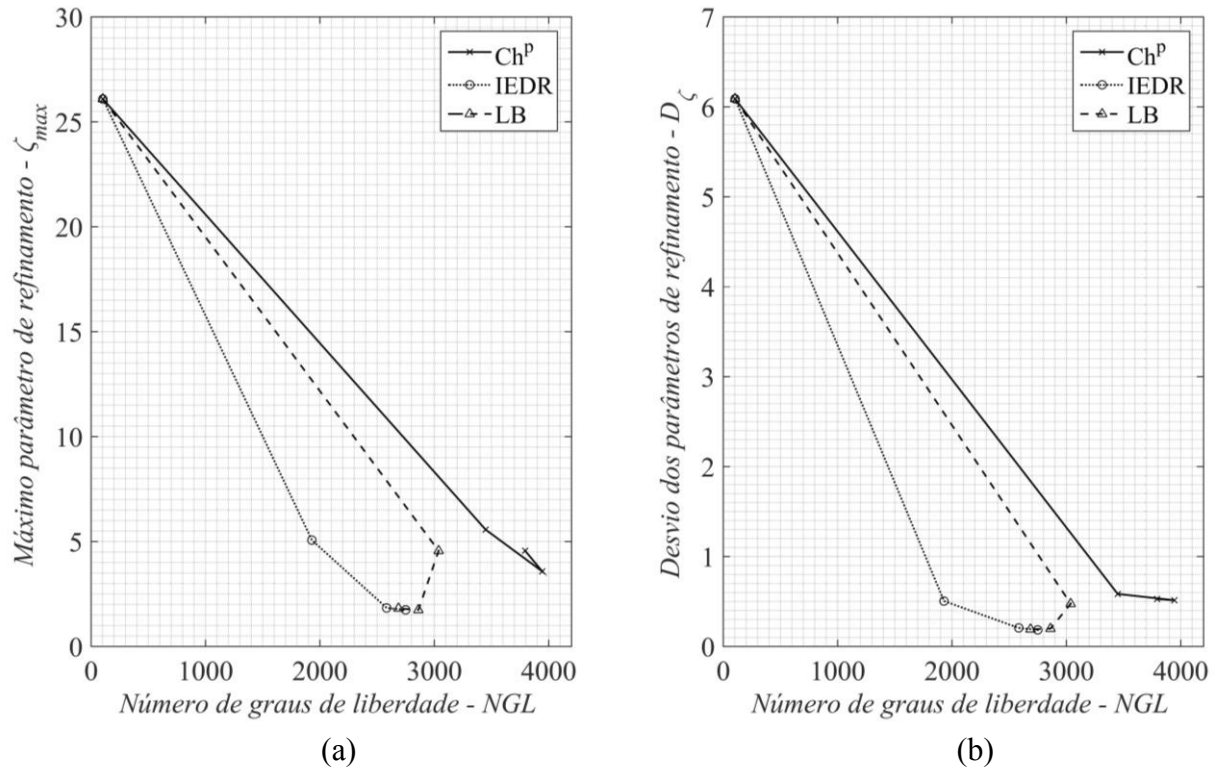


FONTE: O autor (2017).

Na TABELA 2 e FIGURAS 20 e 21 são expostos, respectivamente, os resultados numéricos e gráficos dos parâmetros de qualidade adaptativos. As malhas adaptadas e a distribuição dos erros em energia são apresentadas nas FIGURAS 22, 23 e 24.

FIGURA 20 – RESULTADOS PARA EXEMPLO 2: (a) $NGL \times \eta$. (b) $NGL \times \zeta_m$.

FONTE: O autor (2017).

FIGURA 21 – RESULTADOS PARA EXEMPLO 2: (a) $NGL \times \zeta_{max}$. (b) $NGL \times D_\zeta$.

FONTE: O autor (2017).

TABELA 2 – EXEMPLO 2: PROBLEMA DE POISSON – PARÂMETROS DE QUALIDADE DA MALHA.

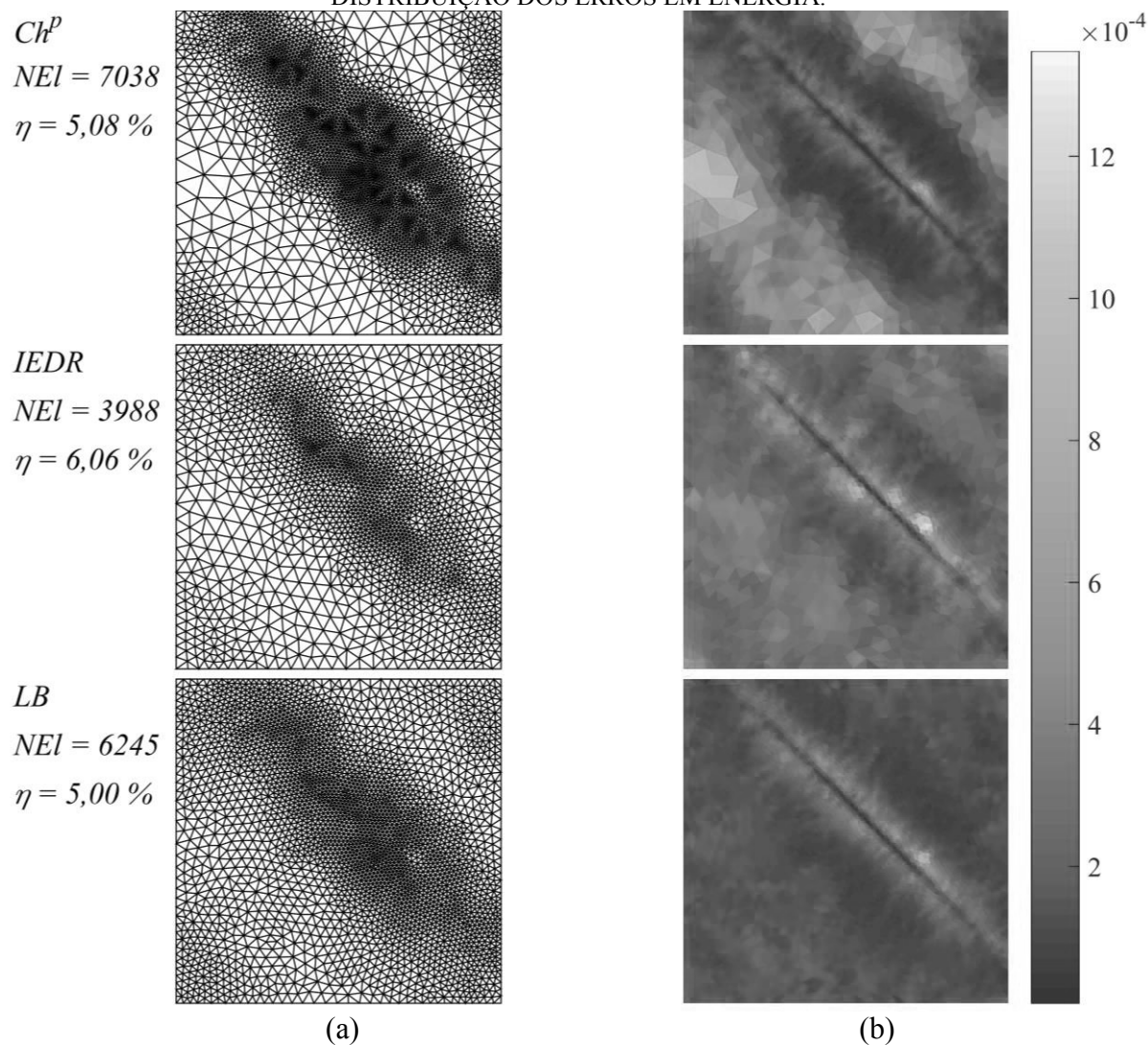
		Malha de elementos finitos			
		Inicial	Adaptada 1	Adaptada 2	Adaptada 3
η	Ch^p	33,68	5,08	4,53	4,70
	IEDR	33,68	6,06	4,96	4,73
	LB	33,68	5,00	4,68	4,79
θ^{zz}	Ch^p	1,01	1,01	1,03	1,01
	IEDR	1,01	1,02	1,02	1,02
	LB	1,01	1,02	1,02	1,02
NGL	Ch^p	103	3449	3944	3794
	IEDR	103	1930	2584	2750
	LB	103	3038	2861	2687
D_ζ	Ch^p	6,09	0,58	0,51	0,53
	IEDR	6,09	0,50	0,21	0,18
	LB	6,09	0,47	0,20	0,19
ζ_m	Ch^p	4,65	0,84	0,78	0,80
	IEDR	4,65	1,11	0,97	0,93
	LB	4,65	0,89	0,92	0,94
ζ_{max}	Ch^p	26,09	5,57	3,58	4,56
	IEDR	26,09	5,07	1,84	1,74
	LB	26,09	4,56	1,74	1,82

FONTE: O autor (2017).

Observa-se que alguns dos resultados apresentados para o exemplo 2, corroboram com os resultados encontrados para o problema de elasticidade, ou seja:

- Uma acentuada oscilação na topologia das malhas adaptadas (refino-desrefino-refino) quando a técnica Ch^p é utilizada (comparação da FIGURAS 22, 23 e 24);
- Um menor número de graus de liberdade para a satisfação do critério de convergência quando as técnicas LB e IEDR são empregadas.
- As técnicas LB e IEDR, quando comparadas com a técnica Ch^p , apresentam malhas com erros em energia melhor distribuídos. Este fato é comprovado através das FIGURAS 20, 21, 22, 23 e 24 e TABELA 2 (D_ζ mais próximo de zero e ζ_m e ζ_{max} mais próximo da unidade).
- Índices de efetividade (TABELA 2) próximos a unidade ao utilizar a técnica SPR.

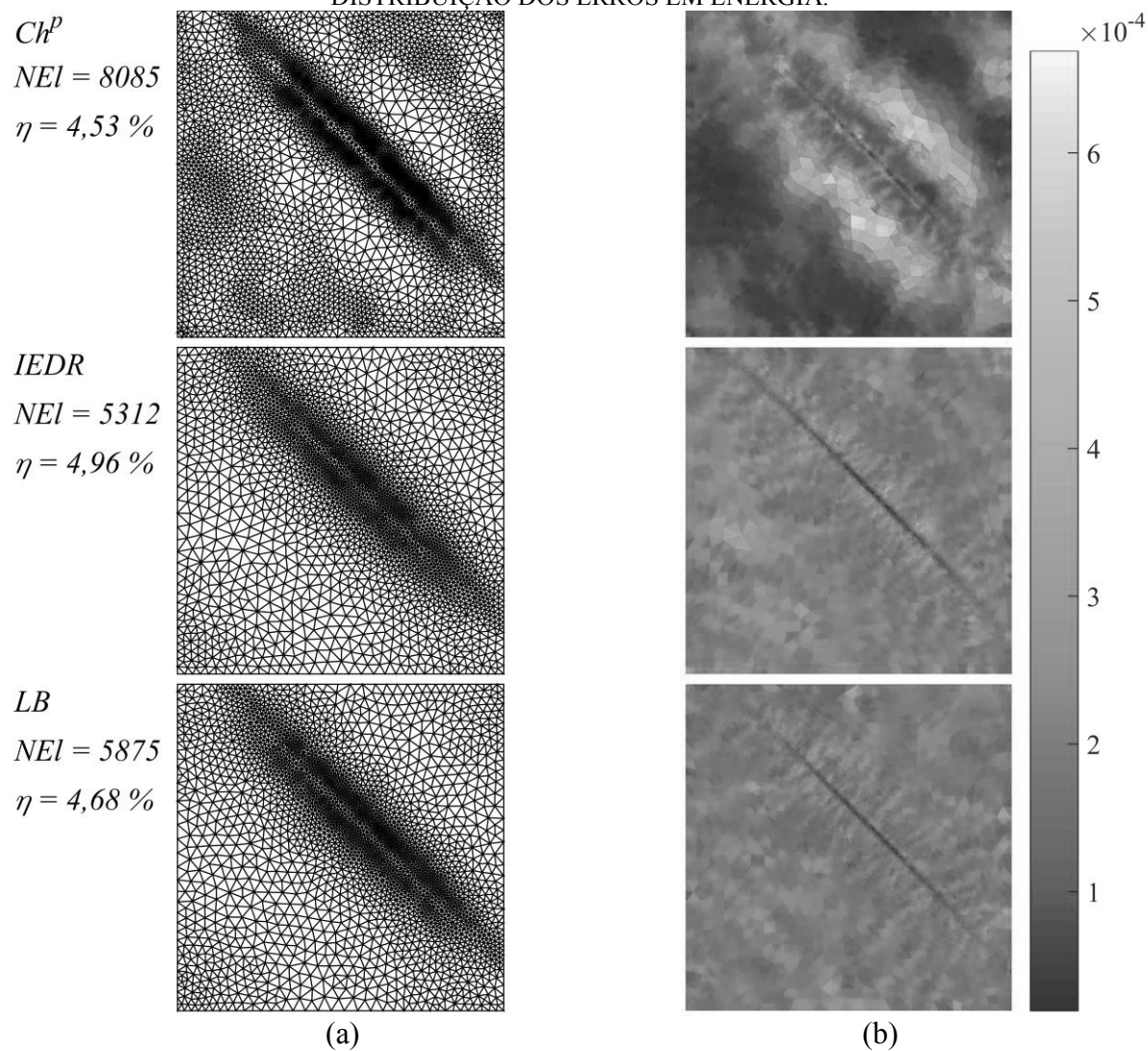
FIGURA 22 – EXEMPLO 2, ITERAÇÃO ADAPTATIVA 1: (a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (b) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.



FONTE: O autor (2017).

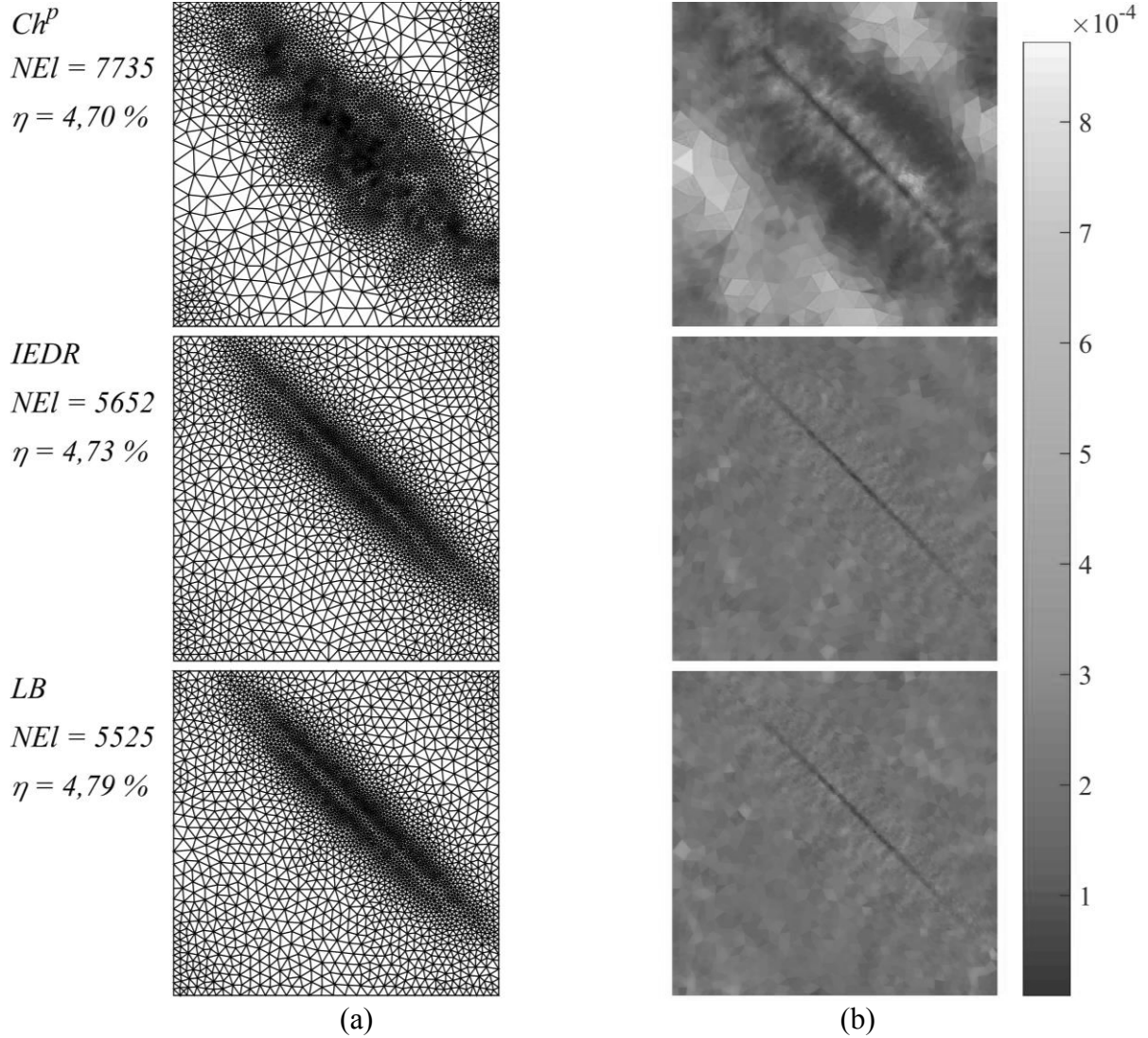
Além disso, para a segunda e terceira iterações adaptativas, percebe-se uma ótima estabilidade quanto a mudança da configuração da malha para as técnicas IEDR e LB. Em geral, para o presente problema, é possível assumir que as técnicas IEDR e LB possuem precisões comparáveis.

FIGURA 23 – EXEMPLO 2, ITERAÇÃO ADAPTATIVA 2: (a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (b) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 24 – EXEMPLO 2, ITERAÇÃO ADAPTATIVA 3: (a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (b) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.



FONTE: O autor (2017).

6.2 RECUPERAÇÃO DA DENSIDADE DO ERRO ANISOTRÓPICA – AEDR: EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta Seção, utilizando dois exemplos numéricos do problema de Poisson (Eq. (93)), são descritos os resultados da comparação da técnica AEDR com a técnica isotrópica de refino LB (LI; BETTESS, 1995; LI et al., 1995). Esta técnica foi escolhida por apresentar, teoricamente, uma malha isotrópica que satisfaz o critério de convergência ($\|e\| \leq \bar{\eta} \|u\|$) com um baixo número de elementos (boa taxa de convergência) (LI et al., 1995; DÍEZ; HUERTA, 1999). Alguns dos resultados aqui apresentados são também descritos no trabalho de Pereira e Silva (2017). Além disso, são efetuados testes em relação ao processo de intersecção de métricas HB.

As taxas de convergência apresentadas são baseadas em valores analíticos da norma do erro em energia. Para cada problema, são realizadas análises com três diferentes tolerâncias ($\bar{\eta} = 10\%, 5\%$ e $2,5\%$). Como parâmetros limitadores da evolução das malhas (Eq. (144)) são adotados $\bar{\alpha} = 3,00$ e $L_c = 0,25$.

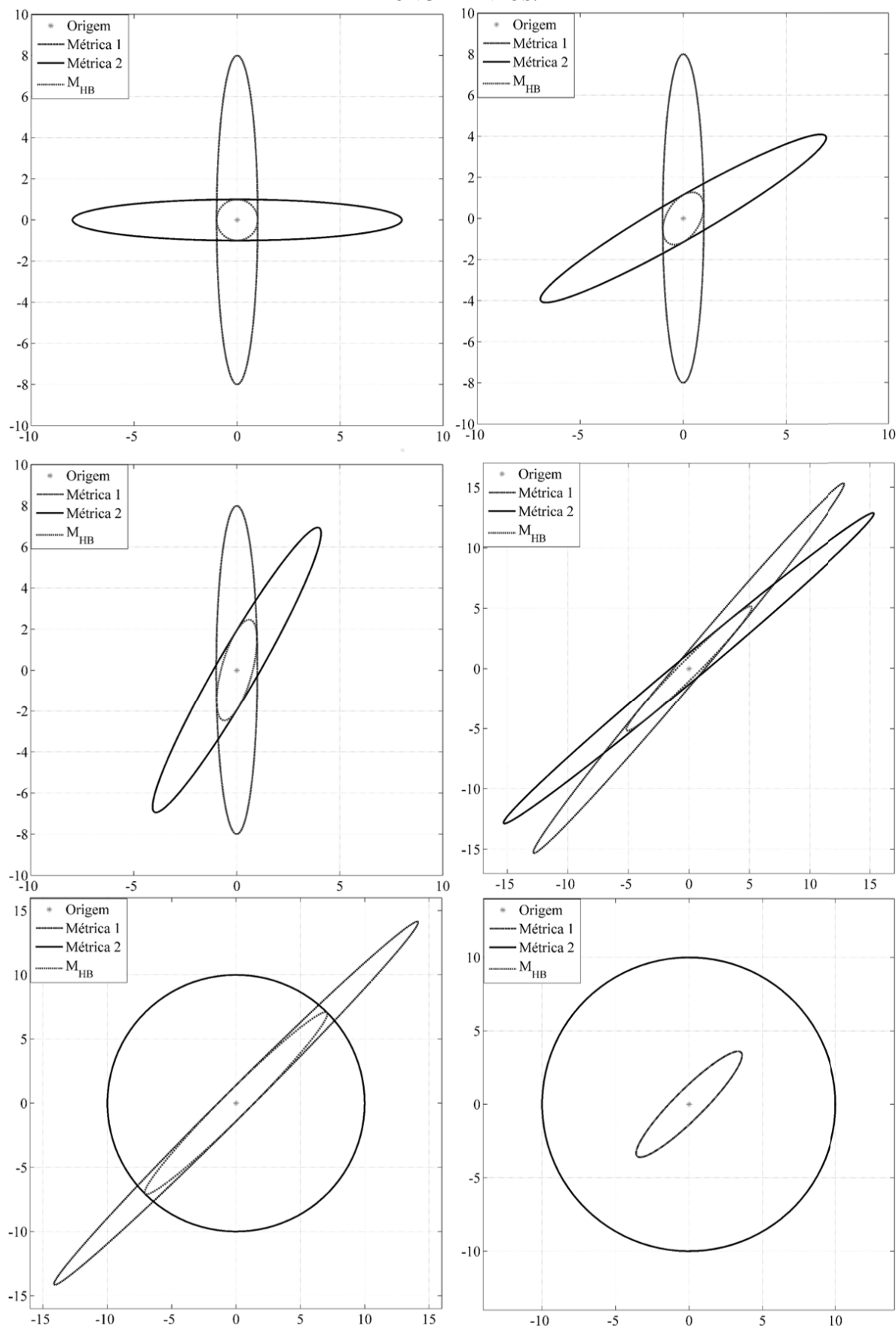
Ademais, são utilizados cinco parâmetros de comparação entre as abordagens: o erro relativo global em forma percentual (η), o número de graus de liberdade (NGL), o índice de efetividade global isotrópico (θ^{ZZ}) e anisotrópico ($\theta^A = I^A / \|e\|$), a razão de aspecto máxima (ar_{max}) e o número de iterações adaptativas para alcançar a tolerância desejada (it). Os valores desses parâmetros são apresentados para a iteração convergente ($\eta \leq \bar{\eta}$) e para a décima iteração. Com isso, pretende-se analisar a estabilidade da técnica AEDR.

6.2.1 Intersecção de métricas

Como posto no Capítulo 5, o processo de intersecção de métricas é essencial para a construção da malha de parâmetros e, conseqüentemente, para a geração da malha adaptada. Assim, para demonstrar as características da técnica HB (BOROUCHAKI et al., 1997a), são realizados testes numéricos, envolvendo a intersecção de duas métricas quaisquer em uma posição genérica (0,0) do domínio, considerando diferentes orientações e alongamentos. Na FIGURA 25 são apresentados os resultados gráficos.

Neste ponto, cabe frisar que um tensor métrico pode ser representado através de uma elipse, cuja as dimensões e a orientação possuem analogia com as dimensões e a orientação de um elemento triangular (FIGURA 25). Assim, percebe-se que, a partir da definição de várias métricas com centro em um ponto comum (neste caso, Métrica 1 e Métrica 2, ambas com origem na posição (0,0)), a técnica de intersecção de métricas HB é uma ótima opção para a determinação de uma métrica de intersecção (M_{HB}). Isto, evidencia-se através da satisfação dos limites da intersecção e da obtenção de informações ponderadas das orientações das métricas originais.

FIGURA 25 – INTERSECÇÃO DE MÉTRICAS PARA DIFERENTES ORIENTAÇÕES E ALONGAMENTOS.



FONTE: O autor (2017).

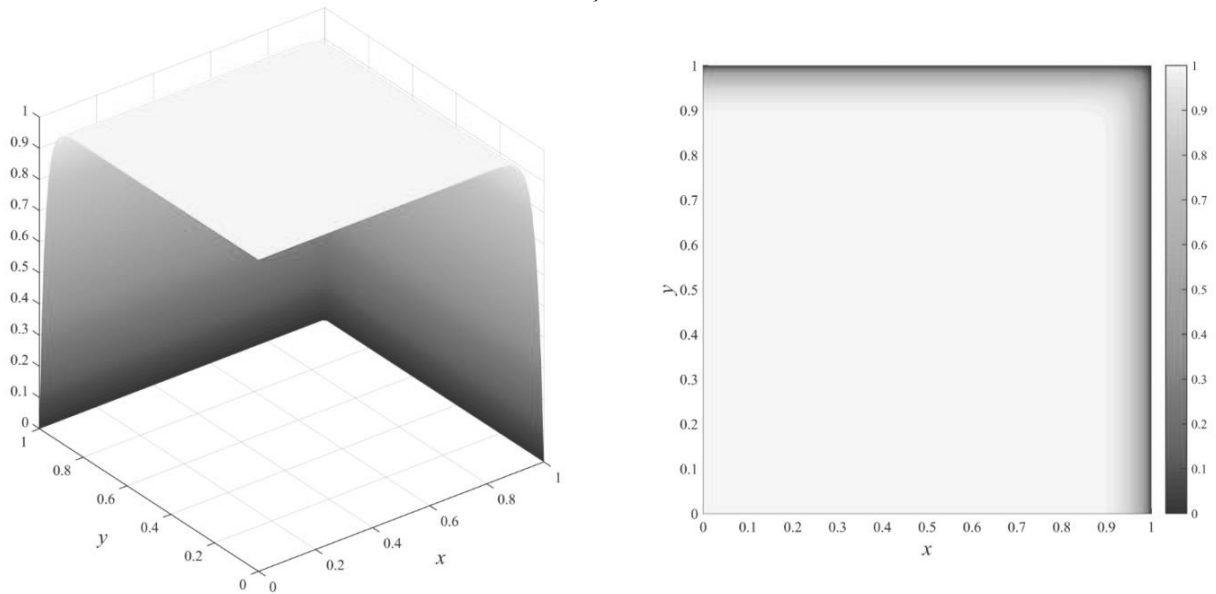
6.2.2 Exemplo 3

Este é um problema elíptico do tipo Poisson com características fortemente anisotrópicas, definido no domínio $\Omega = [0,1]^2 \subset R^2$. A solução analítica, representada na FIGURA 26, possui altas variações ao longo das arestas $x = 1$ e $y = 1$, sendo dada por (BORGES et al., 1998)

$$u(x, y) = (1 - x^{40})(1 - y^{40}), \quad (164)$$

com condições de contorno essenciais definidas através da avaliação direta da Eq. (164). A técnica de recuperação de gradientes adotada, como em Borges et al. (1998), é a técnica de média ponderada pelo valor inverso da distância entre o nó em análise e o centro dos elementos que formam o padrão no entorno desse nó.

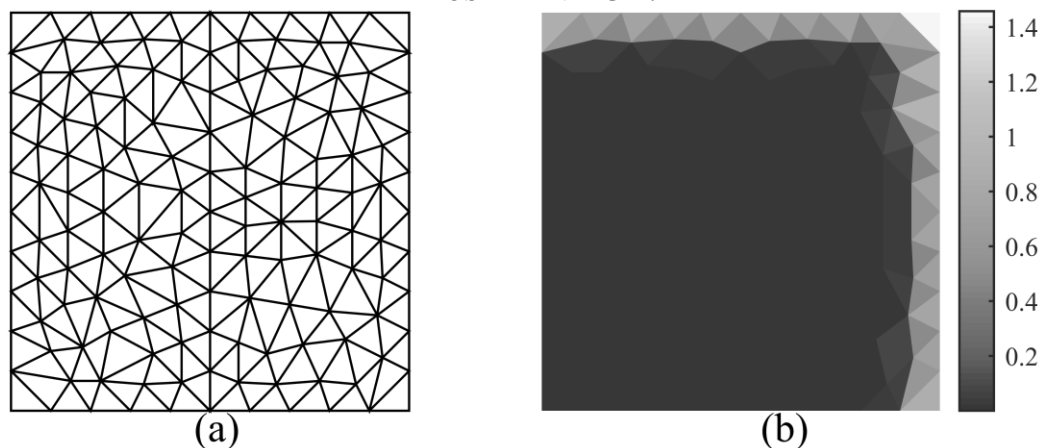
FIGURA 26 – SOLUÇÃO DO EXEMPLO 3.



FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 27 são expostas a discretização de elementos finitos inicial e a distribuição dos erros em energia. Esta discretização é empregada como ponto de partida para todas as tolerâncias aqui avaliadas. Como esperado, os maiores erros encontram-se próximos às arestas direita e superior do domínio. Os parâmetros do processo adaptativo considerando $\eta \leq \bar{\eta}$ e a décima iteração são apresentados, respectivamente, nas TABELAS 3 e 4.

FIGURA 27 – EXEMPLO 3: (a) MALHA INICIAL DE ELEMENTOS FINITOS. (b) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.



FONTE: O autor (2017).

TABELA 3 – EXEMPLO 3: PARÂMETROS DO PROCESSO ADAPTATIVO PARA $\eta \leq \bar{\eta}$.

$\bar{\eta}$ (%)	10,00		5,00		2,50	
Técnica	AEDR	LB	AEDR	LB	AEDR	LB
η (%)	7,52	9,60	3,90	4,70	2,09	2,30
NGL	124	1291	332	5254	1024	21295
θ^{zz}	1,08	1,03	1,08	1,02	1,08	1,01
θ^A	2,07	1,94	2,13	1,98	2,12	1,99
it	4	3	5	3	6	3
ar_{max}	64,29	-	86,24	-	102,79	-

FONTE: O autor (2017).

TABELA 4 – EXEMPLO 3: PARÂMETROS DO PROCESSO ADAPTATIVO PARA $it = 10$.

$\bar{\eta}$ (%)	10,00		5,00		2,50	
Técnicas	AEDR	LB	AEDR	LB	AEDR	LB
η (%)	7,50	9,44	3,93	4,83	2,09	2,33
NGL	101	1242	275	4959	1024	20253
θ^{zz}	1,05	1,04	1,04	1,02	1,01	1,01
θ^A	2,00	1,96	2,03	1,99	1,98	1,99
ar_{max}	83,38	-	101,14	-	107,88	-

FONTE: O autor (2017).

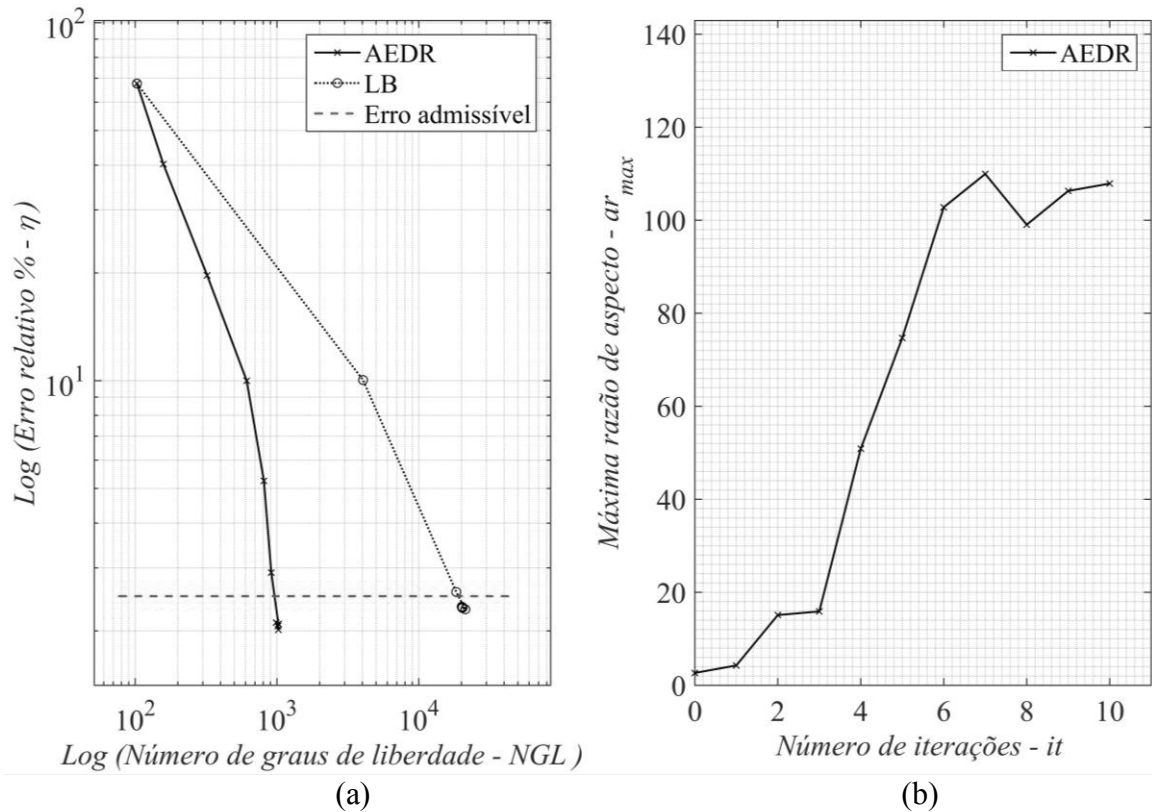
Nota-se que ambas as técnicas conseguem controlar adequadamente os erros de discretização, atingindo a convergência ($\eta \leq \bar{\eta}$). Além disso, como esperado, para todas as tolerâncias analisadas, a técnica AEDR mostra uma redução significativa no número de graus de liberdade em relação à técnica LB, ou seja, uma maior taxa de convergência. Considerando a TABELA 3, esta redução varia de cerca de 10 vezes para $\bar{\eta} = 10\%$, para aproximadamente

21 vezes com $\bar{\eta} = 2,5\%$. Por outro lado, utilizando a técnica isotrópica, a convergência é alcançada com um menor número de iterações adaptativas. No entanto, devido às diferenças no número de graus de liberdade, não necessariamente um menor número de iterações significa um menor custo computacional.

Outro fato a ser realçado é que, para o corrente problema, bons índices de efetividade para o estimador de Zienkiewicz e Zhu (θ^{ZZ}) são obtidos para malhas anisotrópicas com elevadas razões de aspecto. Logo, pode-se concluir que a recuperação da função densidade do erro em energia, a qual forma uma das bases da técnica AEDR, é bem posta. Ademais, os índices de efetividade para o indicador de erro anisotrópico (θ^A) estabilizam próximos a 2, tanto para malhas anisotrópicas quanto para isotrópicas. Isto corrobora com a afirmação de que este indicador representa um limite superior para os erros de discretização relativos aos gradientes da solução (Seção 5.1).

De modo a mostrar o comportamento das técnicas analisadas, nas FIGURAS 28, 29 e 30 estão expostos os resultados gráficos para a décima iteração e $\bar{\eta} = 2,5\%$.

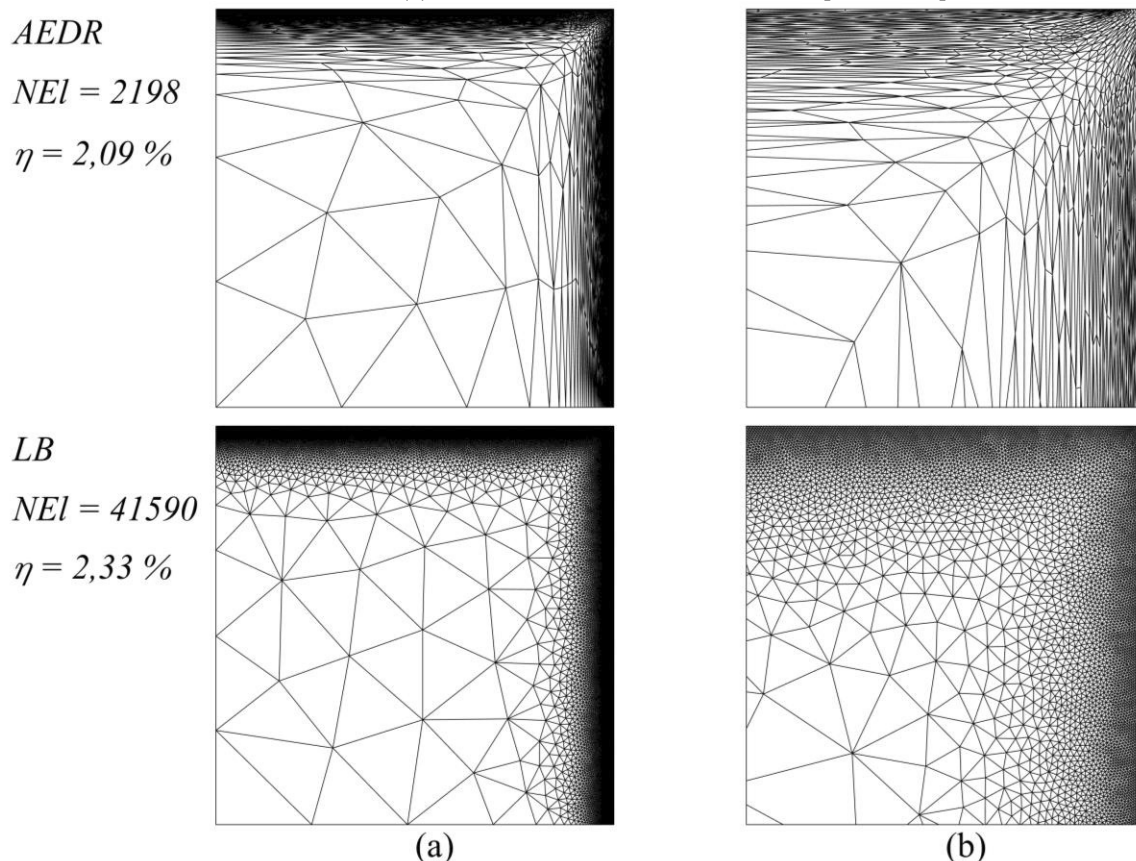
FIGURA 28 – EXEMPLO 3 CONSIDERANDO $\bar{\eta} = 2,50\%$: (a) $NGL \times \eta$. (b) $it \times ar_{max}$.



FONTE: O autor (2017).

Na FIGURA 28 estão apresentadas as curvas de convergência (FIGURA 28(a)) e a evolução da máxima razão de aspecto (FIGURA 28(b)). Observa-se que ambas as técnicas são estáveis, uma vez que NGL e η oscilam pouco próximos ao erro admissível.

FIGURA 29 – EXEMPLO 3: MALHA DE ELEMENTOS FINITOS CONVERGENTE PARA $\bar{\eta} = 2.50\%$. (a) VISTA GLOBAL. (b) VISTA AMPLIADA DA REGIÃO $[0,70; 1,00]^2$.



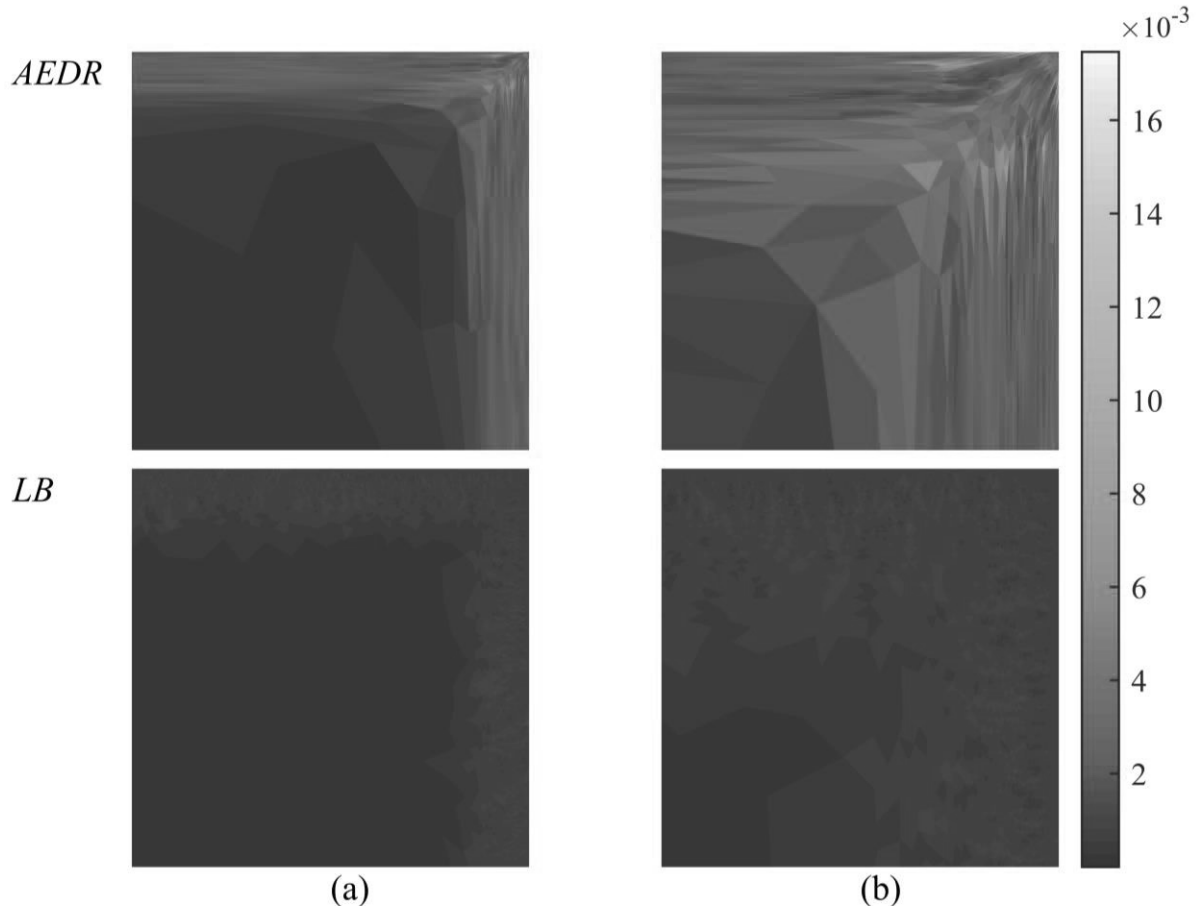
FONTE: O autor (2017).

Quanto à configuração da malha de elementos finitos (FIGURA 29), evidencia-se que ambas as técnicas possuem um maior número de elementos concentrados nas regiões de maior variação da função. Uma vista ampliada da malha na região do canto direito superior (FIGURA 29(b)), realça a principal diferença na topologia da malha das duas técnicas. Ou seja, enquanto a técnica LB apresenta elementos com razões de aspecto próximas da unidade, a técnica AEDR possui elementos com altas razões de aspecto (FIGURA 28(b)) e orientados conforme as direções principais dos erros.

Na FIGURA 30 são apresentados graficamente os valores dos erros em energia para os elementos das malhas da FIGURA 29. Ambas as técnicas, como esperado, buscam equidistribuir os erros. Porém, os valores de erros para os elementos oriundos da aplicação da técnica AEDR são mais elevados. Esse comportamento deve-se ao fato de que a técnica

AEDR possui um número de elementos significativamente menor do que a técnica isotrópica. Assim como as duas técnicas encontram-se no mesmo patamar de erro global, os elementos oriundos da técnica AEDR possuem valores de erro superiores aos da técnica LB.

FIGURA 30 – EXEMPLO 3: DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA PARA $\bar{\eta} = 2.50\%$. (a) VISTA GLOBAL. (b) VISTA AMPLIADA DA REGIÃO $[0,70; 1,00]^2$.



FONTE: O autor (2017).

6.2.3 Exemplo 4

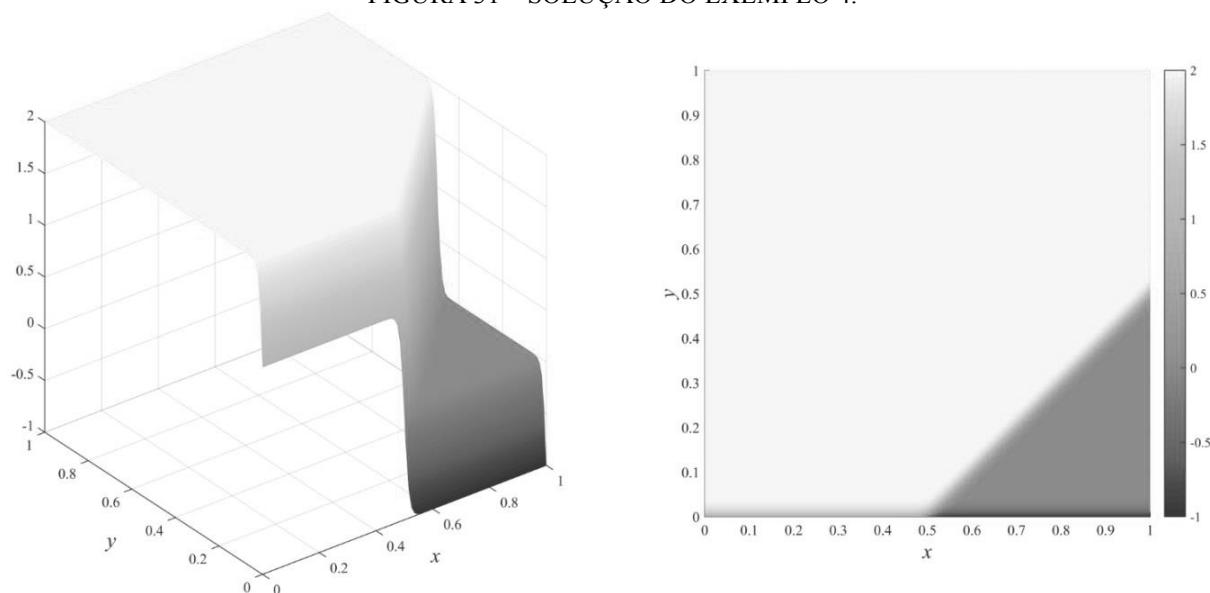
O exemplo 4 representa a interação entre uma camada limite de contorno e uma onda de choque oblíqua interna, definida em um domínio $\Omega = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ e cuja solução analítica (FIGURA 31) é dada por (HUANG, 2005, 2006)

$$u(x, y) = \tanh(60y) - \tanh(60(x - y) - 30). \quad (165)$$

Neste caso, são aplicadas somente condições de contorno essenciais, as quais são definidas a partir da avaliação direta da Eq. (165). Uma solução análoga foi proposta por (HAGMEIJER,

1994). Como técnica de recuperação de gradientes utiliza-se um processo de média ponderada pela área. Este método já foi utilizado com êxito na análise dos erros e h-adaptatividade de malhas anisotrópicas (PICASSO, 2003b, 2006).

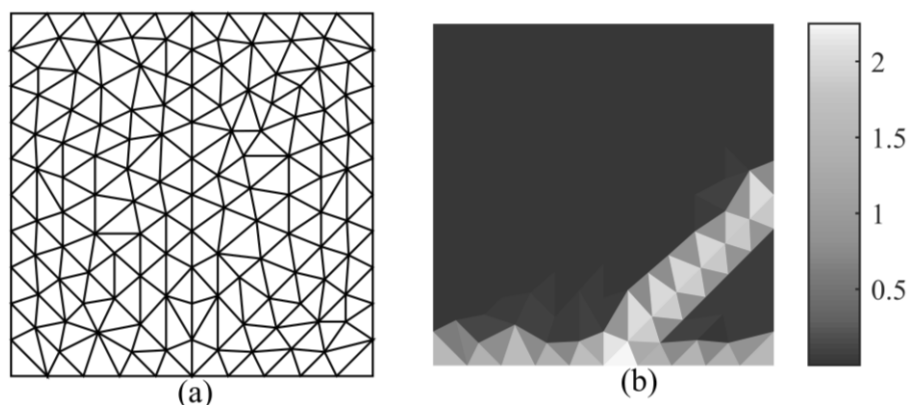
FIGURA 31 – SOLUÇÃO DO EXEMPLO 4.



FONTE: O autor (2017).

A malha de elementos finitos inicial (FIGURA 32(a)) é quase uniforme e composta por 252 elementos, possuindo um erro relativo $\eta = 85,66\%$. A distribuição dos erros em energia é apresentada na FIGURA 32(b).

FIGURA 32 – EXEMPLO 4: (a) MALHA INICIAL DE ELEMENTOS FINITOS. (b) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.



FONTE: O autor (2017).

Nas TABELAS 5 e 6, são expostos os resultados numéricos, respectivamente, para $\eta \leq \bar{\eta}$ e para a décima iteração adaptativa. Considerando $\bar{\eta} = 5\%$ e as 10 primeiras iterações,

na FIGURA 33(a) é mostrado o histórico de convergência do erro relativo analítico, enquanto que a variação da máxima razão de aspecto para a técnica AEDR é apresentada na FIGURA 33(b). Ademais, nas FIGURAS 34 e 35, podem ser visualizadas, respectivamente, comparações entre as malhas e a distribuição dos erros em energia para as técnicas AEDR e LB.

TABELA 5 – EXEMPLO 4: PARÂMETROS DO PROCESSO ADAPTATIVO PARA $\eta \leq \bar{\eta}$.

$\bar{\eta}$ (%)	10,00		5,00		2,50	
Técnica	AEDR	LB	AEDR	LB	AEDR	LB
η (%)	9,37	8,85	4,08	4,51	2,20	2,33
NGL	255	2728	668	10736	2115	39173
θ^{ZZ}	1,08	1,03	1,02	1,01	0,99	1,00
θ^A	2,07	1,98	2,01	2,00	1,92	2,00
it	5	3	6	2	7	2
ar_{max}	63,58	-	124,16	-	91,12	-

FONTE: O autor (2017).

TABELA 6 – EXEMPLO 4: PARÂMETROS DO PROCESSO ADAPTATIVO PARA $it = 10$.

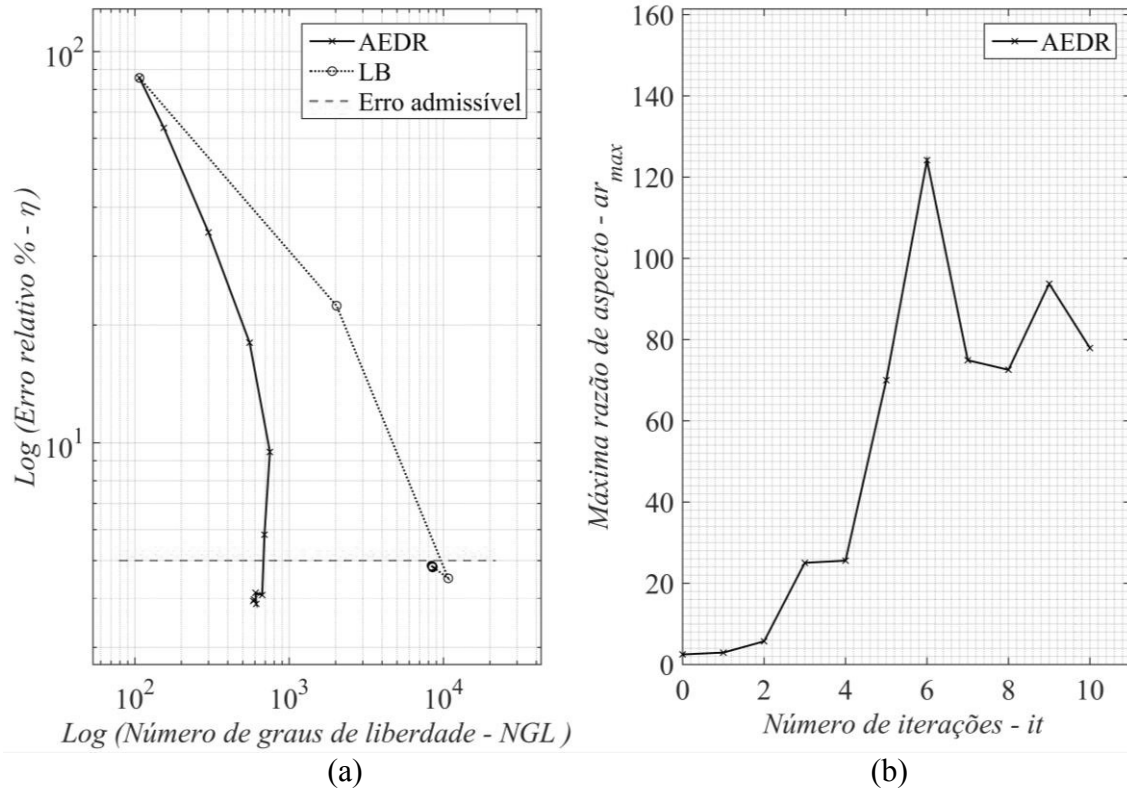
$\bar{\eta}$ (%)	10,00		5,00		2,50	
Técnicas	AEDR	LB	AEDR	LB	AEDR	LB
η (%)	8,22	9,61	3,94	4,82	2,09	2,41
NGL	174	2233	586	8526	2136	32883
θ^{ZZ}	1,04	1,04	1,00	1,01	0,98	1,00
θ^A	2,00	2,00	1,94	2,00	1,91	2,00
ar_{max}	98,28	-	77,92	-	75,55	-

FONTE: O autor (2017).

Os resultados encontrados, comparando a técnica AEDR em relação a técnica LB, corroboram com os do exemplo 3 e podem ser listados resumidamente como:

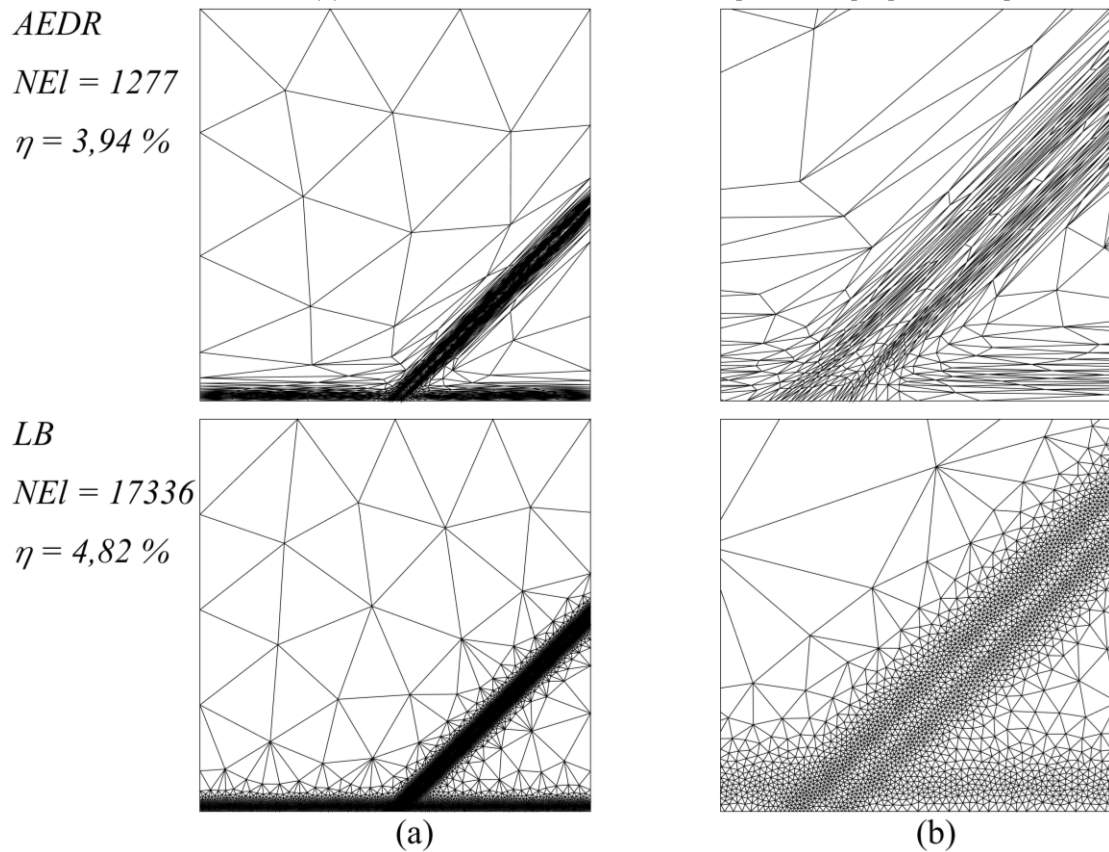
- Satisfação do critério de convergência ($\eta \leq \bar{\eta}$) com um menor número de graus de liberdade (redução de 10 a 20 vezes) e mais iterações adaptativas (TABELAS 5 e 6 e FIGURA 33).
- Índices de efetividade θ^{ZZ} e θ^A próximos a 1 e 2, respectivamente (TABELAS 5 e 6).

FIGURA 33 – EXEMPLO 4 CONSIDERANDO $\bar{\eta} = 5,00\%$: (a) $NGL \times \eta$. (b) $it \times ar_{max}$.



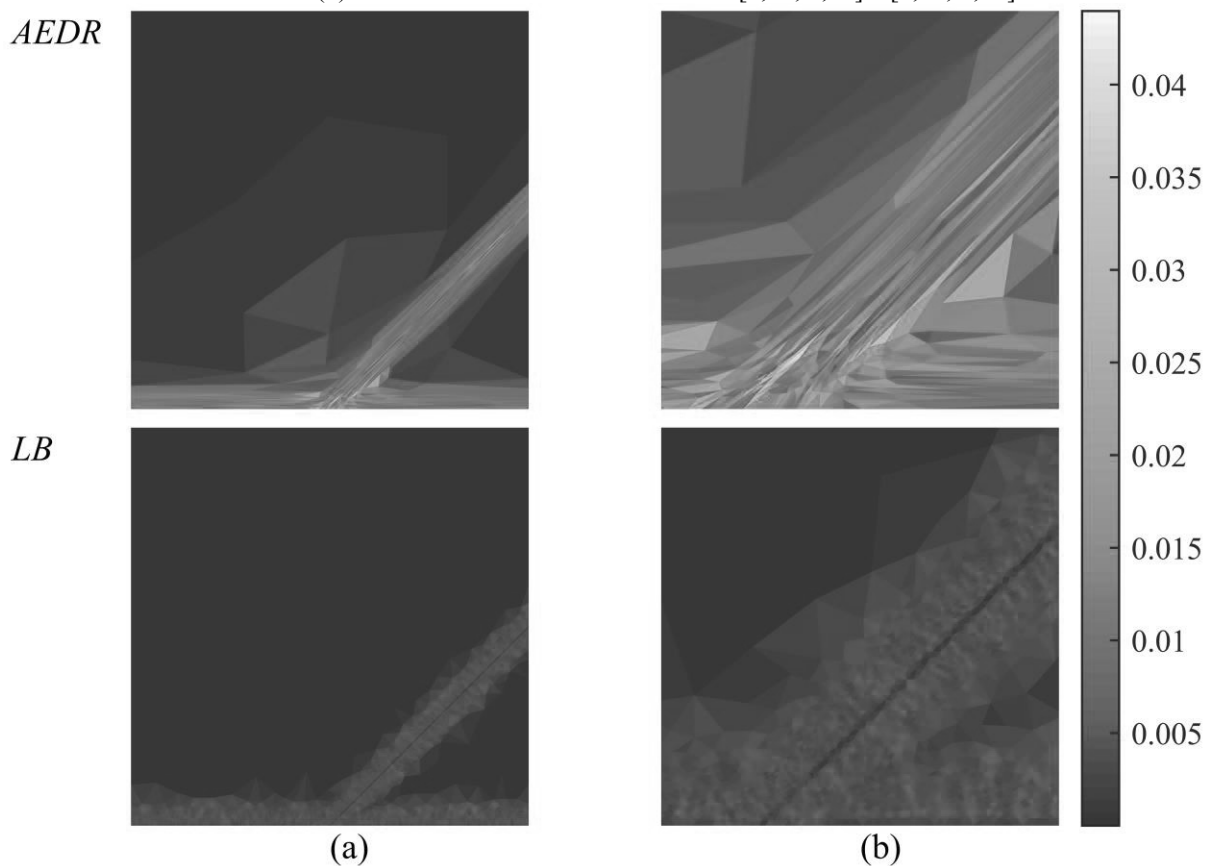
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 34 – EXEMPLO 4: MALHA DE ELEMENTOS FINITOS CONVERGENTE PARA $\bar{\eta} = 5,00\%$. (a) VISTA GLOBAL. (b) VISTA AMPLIADA DA REGIÃO $[0,45; 0,65] \times [0,00; 0,20]$.



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 35 – EXEMPLO 4: DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA PARA $\bar{\eta} = 5,00\%$. (a) VISTA GLOBAL. (b) VISTA AMPLIADA DA REGIÃO $[0,45; 0,65] \times [0,00; 0,20]$.



FONTE: O autor (2017).

- Malhas compostas de elementos com elevadas razões de aspecto e orientados de acordo com as direções principais dos erros em energia (TABELAS 5 e 6 e FIGURA 34).
- Uma distribuição aproximadamente uniforme dos erros em energia ao longo do domínio (FIGURA 35).

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES: APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS IEDR E AEDR EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Este Capítulo apresenta os resultados numéricos referentes à aplicação das técnicas h-adaptativas IEDR e AEDR em problemas de OETC. A descrição e implementação do esquema proposto é discutido na Seção 7.1, enquanto a análise dos resultados é realizada nas Seções subsequentes.

São avaliados quatro exemplos de problemas de OETC considerando estado plano de tensões. Para cada caso, parte-se de uma malha inicial relativamente grosseira e quase uniforme, com o objetivo de satisfazer os critérios de convergência. Neste caso, diferentemente da maioria dos trabalhos apresentados na literatura referentes a problemas de OETC, destaca-se o fato do novo esquema de otimização estrutural, aqui proposto, buscar a satisfação de critérios de convergência relacionados com a limitação e o controle dos erros de discretização. Tais critérios são descritos posteriormente. O esquema iterativo utilizado na busca por uma solução estrutural ótima é apresentado na Seção 7.1. Cabe frisar que, de modo a obter uma solução progressiva, algumas limitações são impostas às técnicas IEDR e AEDR.

Para a técnica IEDR são aplicados dois refinamentos intermediários antes de buscar atingir o erro relativo final. Os valores do erro percentual admissível para esses refinamentos são calculados através de uma progressão geométrica entre o valor de erro percentual da malha inicial e $\bar{\eta}$. Além disso, utiliza-se um fator de aceleração \bar{C} (Eq. (84)) igual a 0,9 e a única limitação imposta sobre o novo tamanho dos elementos é $h_{new} \leq L_c$, onde L_c é um limite superior para o tamanho do elemento. Esta limitação é criada devido ao fato de que, em regiões de vazios, os erros em energia são muito baixos e, portanto, o tamanho dos elementos pode aumentar muito. Com isso, embora os erros de discretização permaneçam controlados, a utilização de elementos muito grandes nessas regiões pode afetar a qualidade da definição do contorno material. Em todos os casos, L_c é igual a 5% da diagonal do domínio do problema, a qual é estimada a partir dos valores máximos e mínimos das componentes nodais.

Quanto à aplicação da técnica AEDR, uma vez que esta considera a obtenção de uma solução progressiva (Eqs. (144) e (145)), limitações adicionais não são necessárias. Porém, cabe mencionar que razões de aspecto muito elevadas são evitadas para os problemas de OETC. Tal restrição é imposta, pois, tanto a técnica AEDR como a estimativa dos erros em energia via estimador ZZ (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987, 1992a, 1992b) dependem da qualidade dos valores dos gradientes recuperados. Por sua vez, no âmbito de malhas

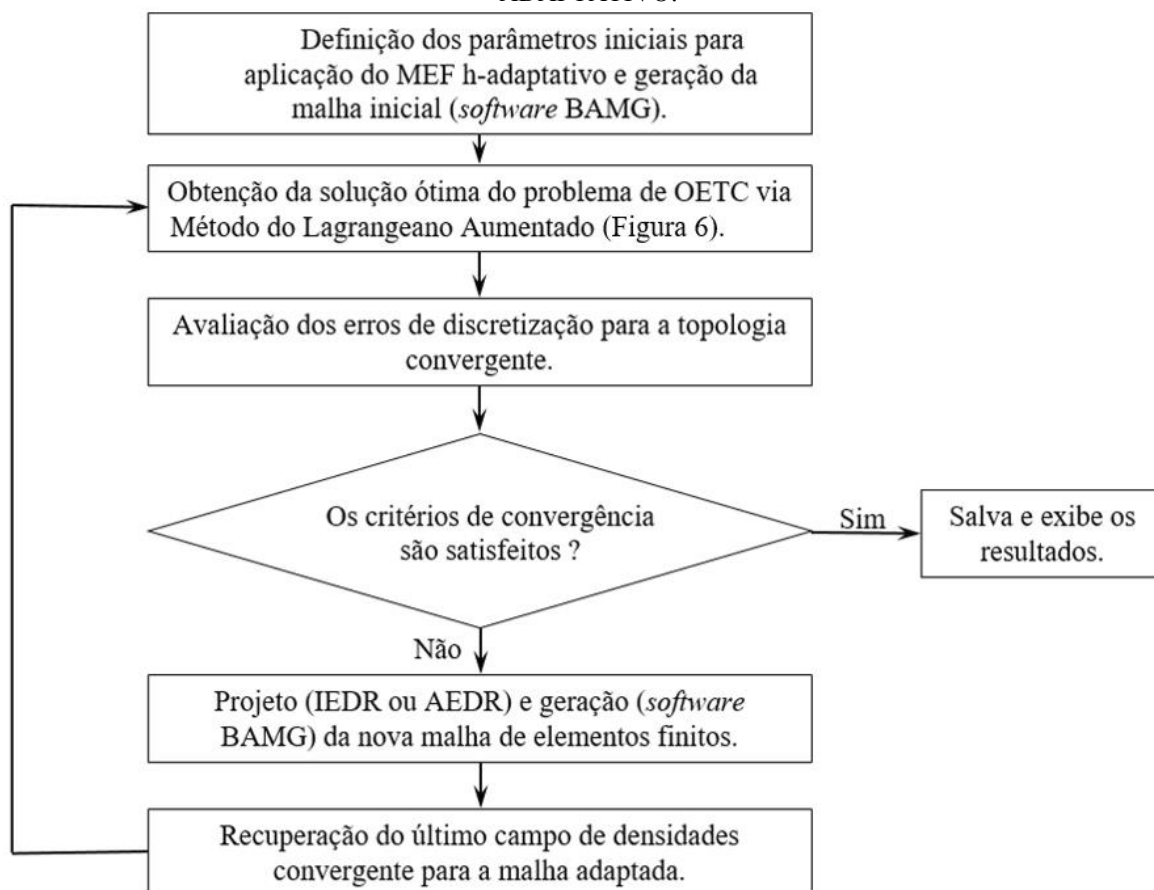
anisotrópicas adaptadas, Cao (2014, 2015) demonstra que estes valores estão relacionados com a simetria local da estrutura da malha de elementos finitos. Em especial, a superconvergência da técnica baseada em mínimos quadrados locais é mantida para malhas quase uniformes segundo uma métrica Riemannian e para pares de elementos adjacentes que formam aproximadamente um paralelogramo (CAO, 2014).

Ademais, para as técnicas em análise, são realizadas comparações entre as topologias e as distribuições dos erros em energia para diferentes estágios do processo adaptativo. Também são apresentados os históricos de convergência para os funcionais Lagrangeano Aumentado e energia.

7.1 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM H-ADAPTATIVIDADE

O processo iterativo pela busca da topologia ótima utilizando técnicas h-adaptativas pode ser resumido através do fluxograma da FIGURA 36. Este processo é proposto por Silva e Pereira (2017).

FIGURA 36 – PROCEDIMENTO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OETC UTILIZANDO O MEF h-ADAPTATIVO.



FONTE: O autor (2017).

A formulação descrita nos capítulos anteriores, exceto a geração de malha, é implementada numericamente em Matlab®. O sistema linear de equações, vinculado a determinação dos deslocamentos da estrutura, é solucionado utilizando o pré-condicionador exposto por Wang, de Sturler e Paulino (2007). Este pré-condicionador é definido por uma matriz diagonal que contém informações sobre a diagonal da matriz de rigidez. As propriedades de simetria da matriz \mathbf{K} são mantidas. A geração das malhas iniciais e adaptativas é realizada através do *software* BAMG (Hecht, 1998, 2006, 2012). Ademais, em duas subseções adicionais, são discutidos a definição do critério de convergência sobre o erro global em energia e o processo de recuperação do campo de densidades para a malha adaptada.

7.1.1 Estimativa dos erros de discretização e definição do critério de convergência

A estimativa dos erros de discretização é realizada por um estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987, 1992a, 1992b). São avaliadas duas diferentes normas em energia para a topologia final. A primeira é a norma do erro em energia avaliada segundo o campo de tensões e considerando a variação das propriedades materiais, $\|\mathbf{e}\|_\sigma$, dada por

$$\|\mathbf{e}\|_\sigma = \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_\rho^{REC} - \boldsymbol{\sigma}_\rho^{MEF})^T \mathbf{D}_\rho^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_\rho^{REC} - \boldsymbol{\sigma}_\rho^{MEF}) d\Omega \right)^{1/2}. \quad (166)$$

A segunda é a norma do erro em energia considerando deformações, $\|\mathbf{e}\|_\varepsilon$, posta como

$$\|\mathbf{e}\|_\varepsilon = \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^{REC} - \boldsymbol{\varepsilon}^{MEF})^T \mathbf{D}_\rho (\boldsymbol{\varepsilon}^{REC} - \boldsymbol{\varepsilon}^{MEF}) d\Omega \right)^{1/2}. \quad (167)$$

A avaliação de ambas as normas considera o tensor constitutivo \mathbf{D}_ρ constante e igual ao valor do campo ρ no baricentro de cada elemento, sendo o campo de deformações ou tensões recuperadas fornecidos pela técnica SPR (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992a, 1992b). Uma vez que o objetivo das técnicas h-adaptativas propostas é a equidistribuição e limitação dos erros em energia considerando tensões (Eq. (65)), o critério de convergência sobre o erro é construído com base em $\|\mathbf{e}\|_\sigma$. Por outro lado, a norma do erro em energia considerando deformações (Eq. (167)) tem sido utilizada na literatura como um indicador para o refino em

problemas de otimização estrutural (SIENZ; HINTON, 1997; COSTA Jr; ALVES, 2003; WANG; KANG; HE, 2014). Assim, os valores de $\|\mathbf{e}\|_\varepsilon$ são um objeto de comparação.

Devido ao fato dos valores de $\|\mathbf{e}\|_\sigma$ e $\|\mathbf{e}\|_\varepsilon$ serem medidas absolutas dos erros, torna-se difícil especificar tolerâncias. Assim, a definição de parâmetros relativos percentuais dos erros, são postas como

$$\eta_\varepsilon = \left(\|\mathbf{e}\|_\varepsilon / \|\mathbf{u}\|_\varepsilon \right) 100\% \quad e \quad \eta_\sigma = \left(\|\mathbf{e}\|_\sigma / \|\mathbf{u}\|_\sigma \right) 100\%. \quad (168)$$

Neste caso, $\|\mathbf{u}\|_\varepsilon$ e $\|\mathbf{u}\|_\sigma$ representam, respectivamente, a norma da energia total analítica do sistema considerando deformações e tensões. Como os problemas em análise não possuem solução analítica, é utilizada a propriedade da ortogonalidade do erro em relação à solução aproximada (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987; ODEN; REDDY, 2011) para estimar $\|\mathbf{u}\|_\varepsilon$ e $\|\mathbf{u}\|_\sigma$. Assim, pode-se escrever

$$\|\mathbf{u}\|_\varepsilon = \left(\left(\|\mathbf{u}\|_\varepsilon^{MEF} \right)^2 + \left(\|\mathbf{e}\|_\varepsilon \right)^2 \right)^{1/2} \quad e \quad \|\mathbf{u}\|_\sigma = \left(\left(\|\mathbf{u}\|_\sigma^{MEF} \right)^2 + \left(\|\mathbf{e}\|_\sigma \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (169)$$

onde

$$\|\mathbf{u}\|_\varepsilon^{MEF} = \left(\int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{MEF} \right)^T \mathbf{D}_\rho \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{MEF} \right) d\Omega \right)^{1/2} \quad e \quad \|\mathbf{u}\|_\sigma^{MEF} = \left(\int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma}_\rho^{MEF} \right)^T \mathbf{D}_\rho^{-1} \left(\boldsymbol{\sigma}_\rho^{MEF} \right) d\Omega \right)^{1/2}. \quad (170)$$

Portanto, caso $\eta_\sigma \leq \bar{\eta}$, admite-se que a topologia obtida é convergente em relação aos erros de discretização.

7.1.2 Recuperação do campo de densidades

Entende-se por recuperação do campo de densidades a transferência (aproximada) do campo de densidades definido na malha antiga (corrente) para a malha atual (adaptada). Aqui, o objetivo é acelerar a convergência na obtenção da próxima solução do problema de otimização.

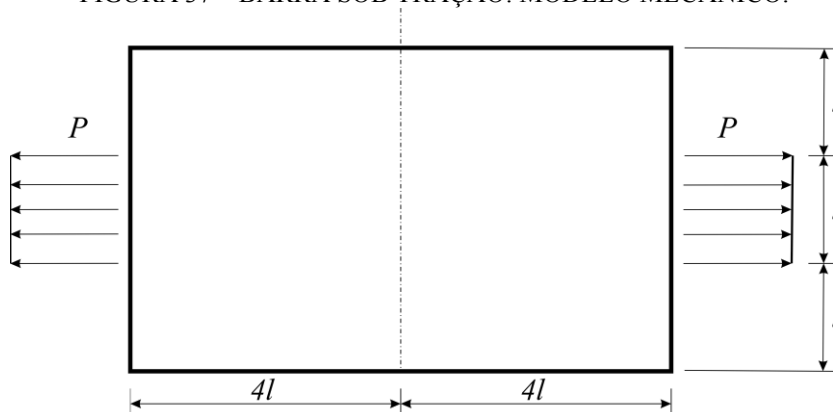
A definição do novo vetor de densidades é realizada através do mapeamento da nova malha sobre a antiga. Inicialmente, com centro em cada nó da malha nova, é definida uma

região circular de raio pré-determinado. Em seguida, as densidades dos nós da malha antiga que estiverem inseridas nessa região, são atribuídas para o nó em análise através de um processo de média ponderada pelo inverso da distância.

7.2 BARRA SOB TRAÇÃO

Este exemplo considera uma estrutura retangular submetida a cargas uniaxiais em suas extremidades (FIGURA 37). Os parâmetros geométricos, materiais, de otimização e adaptativos são apresentados na TABELA 7. As propriedades materiais e dimensões geométricas são idênticas àquelas utilizadas por Pereira (2001). O modelo de elementos finitos é construído considerando somente a simetria em relação ao eixo vertical.

FIGURA 37 – BARRA SOB TRAÇÃO: MODELO MECÂNICO.



FONTE: O autor (2017).

TABELA 7 – BARRA SOB TRAÇÃO: PARÂMETROS INICIAIS.

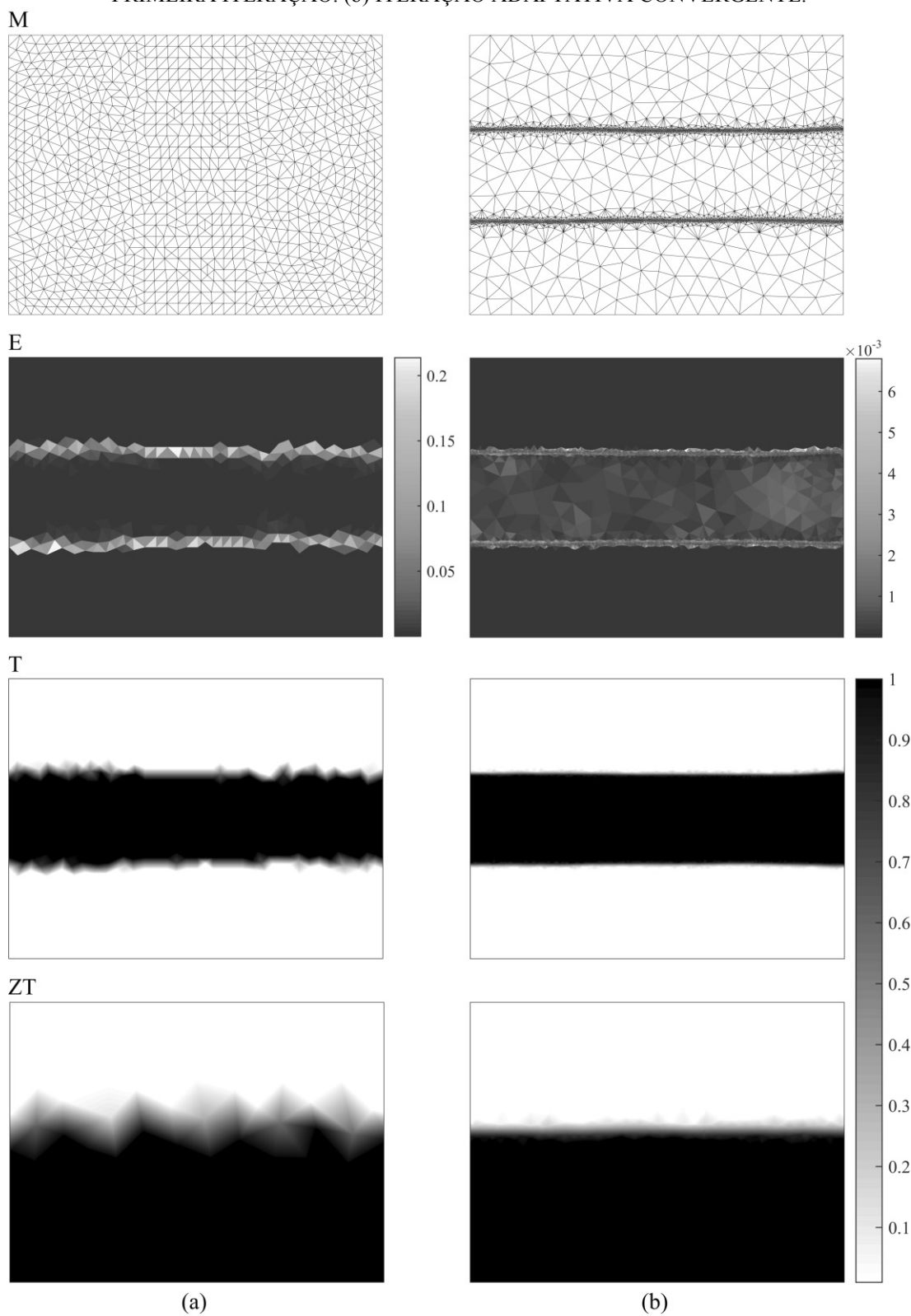
Variável	Valor (unidade)	Variável	Valor (unidade)	Variável	Valor (unidade)
λ	0,33	l	1,00 (m)	P	10,00 (kN)
E	100,00 (MPa)	ν	0,30	$\bar{\alpha}$	2,50
r_m	0,05 (N.m)	r_ρ	0,0005 (N.m)	FS_{max}	30,00

FONTE: O autor (2017).

7.2.1 Resultados IEDR

Na FIGURA 38 observam-se os resultados gráficos da técnica IEDR como guia do processo adaptativo de busca por uma solução estrutural ótima. Considerando os resultados ao final da primeira iteração (malha inicial), apresentada na FIGURA 38(a), e ao final da iteração adaptativa convergente (FIGURA 38(b)), a FIGURA 38 apresenta visualizações para a malha de elementos finitos (M), a topologia estrutural ótima (T) e as distribuições dos erros em energia (E).

FIGURA 38 – RESULTADOS PARA BARRA SOB TRAÇÃO E TÉCNICA IEDR AO FINAL DA: (a) PRIMEIRA ITERAÇÃO. (b) ITERAÇÃO ADAPTATIVA CONVERGENTE.



FONTE: O autor (2017).

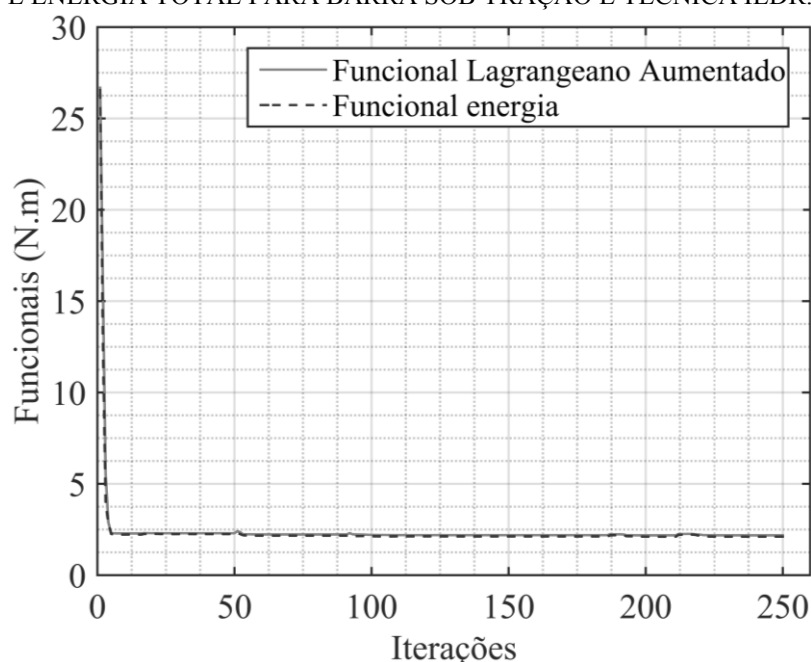
O processo de otimização é iniciado com uma malha quase uniforme (FIGURA 38 – M(a)), composta por 1920 elementos e 1019 nós, cuja topologia final (FIGURA 38 – T(a))

possui um erro relativo $\eta_\sigma = 53,40\%$. Esta topologia é mal definida ao longo do contorno material, pois é originada de uma malha relativamente grosseira. Tal fato é esperado de uma solução de otimização obtida via SIMP e variáveis de projeto atreladas aos nós de uma malha de elementos finitos. Além disso, observa-se na FIGURA 38 (E(a)) uma acentuada variação dos erros em energia no domínio, principalmente nas regiões de interface material-vazio.

A aplicação de quatro sucessivas iterações adaptativas resulta em uma malha com 6443 elementos, 3267 nós e erro relativo $\eta_\sigma = 4,92\%$ (nota-se que $\eta_\sigma < \bar{\eta} = 5,00\%$). A distribuição ótima de material é compatível com a solução encontrada na literatura considerando uma malha fixa fina e uniforme, apresentando uma ótima resolução da interface material-vazio. Uma vista ampliada da topologia convergente (FIGURA 38 – ZT) na região $[0,0; 1,2] \times [1,5; 2,4]$ ressalta a diferença quanto a suavidade da solução topológica para a malha inicial e final. Ademais, a técnica IEDR conduz a uma malha cuja solução encontra-se com os erros em energia aproximadamente equidistribuídos, e com valores absolutos significativamente inferiores aos da primeira iteração (percebe-se que um aumento de cerca de 3 vezes no número de variáveis de projeto ocasiona uma redução de aproximadamente 11 vezes no erro em energia relativo). Em especial, nota-se que, neste caso, a satisfação do critério de equidistribuição do erro exige um refino acentuado ao longo do contorno material.

Os históricos de convergência dos funcionais Lagrangeano Aumentado e energia de deformação são apresentados na FIGURA 39.

FIGURA 39 – HISTÓRICOS DE CONVERGÊNCIA DOS FUNCIONAIS LAGRANGEANO AUMENTADO E ENERGIA TOTAL PARA BARRA SOB TRAÇÃO E TÉCNICA IEDR.



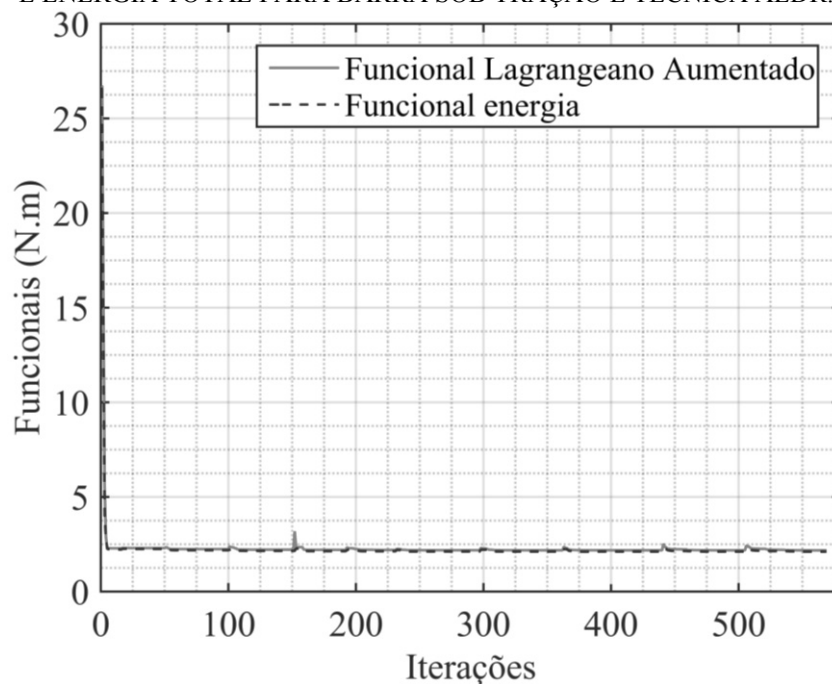
FONTE: O autor (2017).

Ao final do processo de otimização, o funcional energia converge para 2,11 N.m e a restrição sobre o volume h_v é igual a $4e-4$. Na FIGURA 39 identifica-se pouca oscilação da função objetivo, indicando que o processo de recuperação do último campo de densidades para a malha adaptada funciona adequadamente. Assim, a convergência do algoritmo é facilitada.

7.2.2 Resultados AEDR

Esta Subseção discute os resultados do MEF h-adaptativo baseado na técnica AEDR e aplicado ao problema de barra sob tração. Na FIGURA 40 são apresentados os históricos de convergência dos funcionais objetivo (Lagrangeano Aumentado) e energia. Este último estabiliza em 2,10 N.m, com $h_v = 1e-4$. Os resultados gráficos são expostos na FIGURA 41.

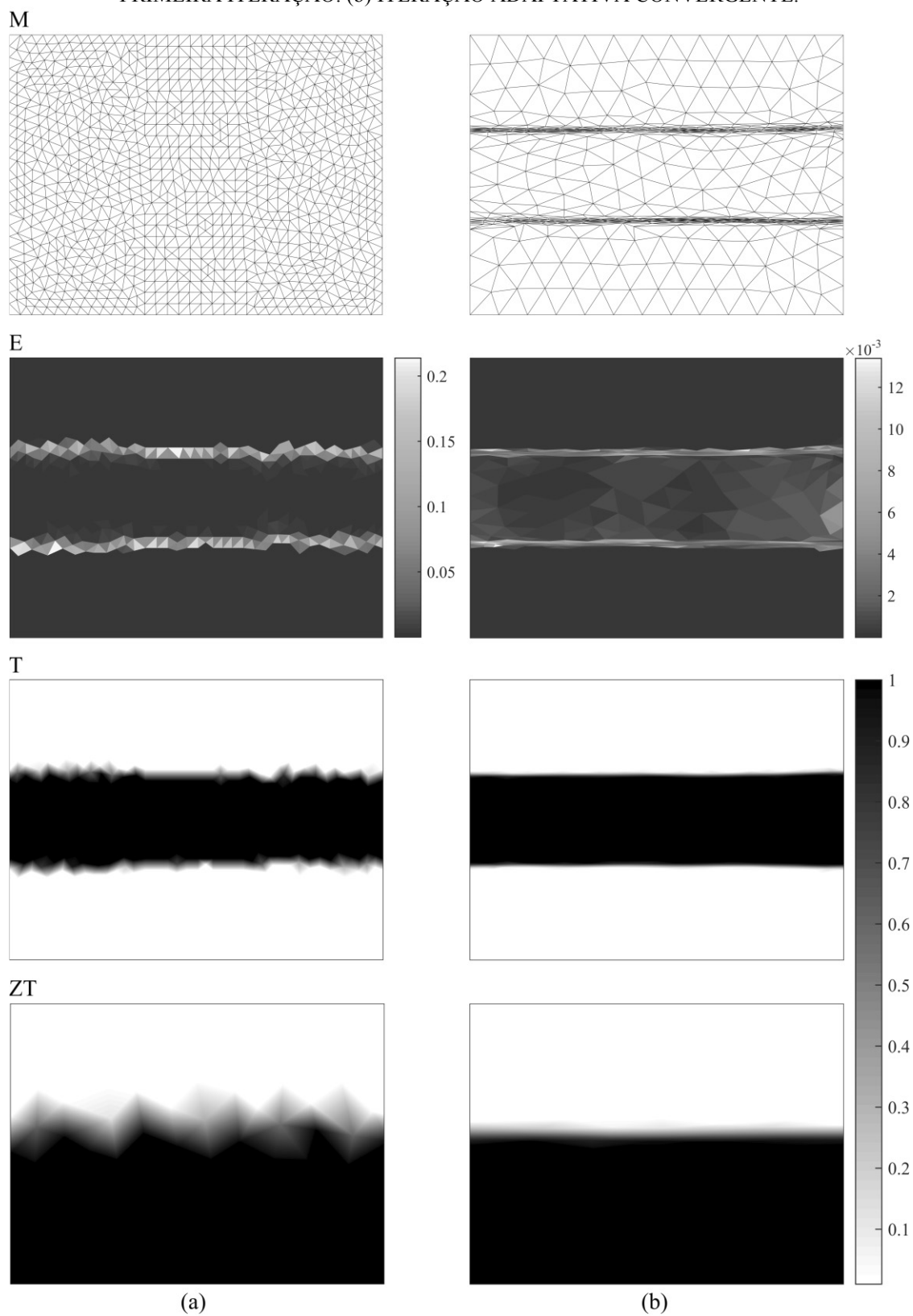
FIGURA 40 – HISTÓRICOS DE CONVERGÊNCIA DOS FUNCIONAIS LAGRANGEANO AUMENTADO E ENERGIA TOTAL PARA BARRA SOB TRAÇÃO E TÉCNICA AEDR.



FONTE: O autor (2017).

A malha inicial é idêntica à utilizada pela técnica IEDR. Porém, a malha final é composta por apenas 861 elementos, 471 nós e $\eta_\sigma = 4,43\%$. Neste caso, são necessárias 9 iterações adaptativas para atingir a convergência. Corroborando com os resultados encontrados para a técnica IEDR, tem-se uma topologia resultante com uma alta definição do contorno material e uma redução significativa nos erros de discretização.

FIGURA 41 – RESULTADOS PARA BARRA SOB TRAÇÃO E TÉCNICA AEDR AO FINAL DA: (a) PRIMEIRA ITERAÇÃO. (b) ITERAÇÃO ADAPTATIVA CONVERGENTE.



FONTE: O autor (2017).

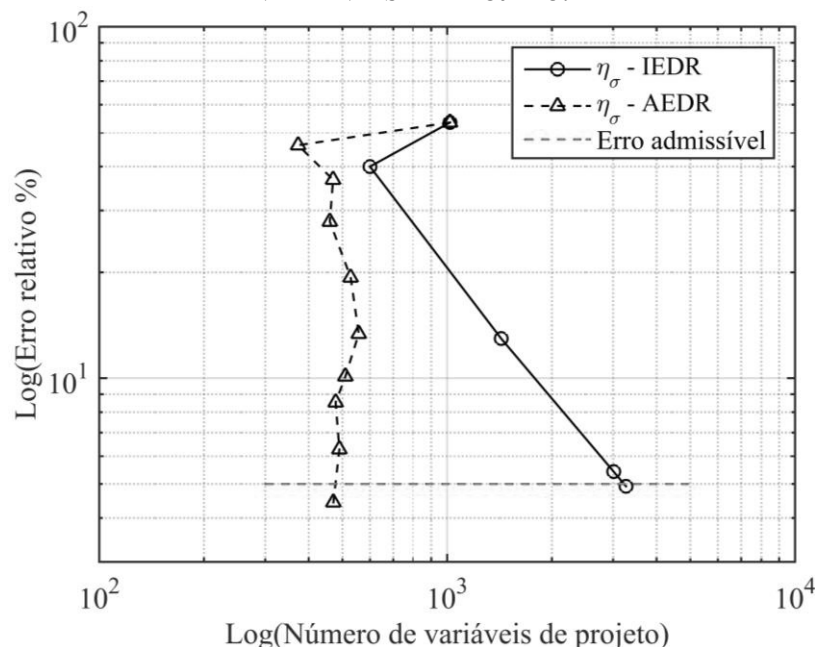
Conforme já identificado, os maiores erros em energia localizam-se ao longo do contorno material. Adicionalmente, a aplicação de uma adaptação de malha anisotrópica

baseada na técnica AEDR, permite afirmar que as direções principais da função densidade do erro em energia estão alinhadas de acordo com as direções principais da variação das propriedades materiais. Assim, as menores dimensões dos elementos encontram-se na direção normal à interface material-vazio (contorno da topologia) (FIGURA 41 – M(b)). Com isso, embora o número de variáveis de projeto seja reduzido, uma topologia final nítida pode ser obtida.

7.2.3 Comparação das técnicas h-adaptativas

Esta Subseção busca confrontar diferentes características obtidas pela aplicação das técnicas IEDR e AEDR ao problema de barra sob tração. Para tal, na FIGURA 42 é mostrado o histórico do erro relativo em função do número de variáveis de projeto e na FIGURA 43 tem-se uma comparação das malhas e topologias finais. As topologias (T) são representadas pelos elementos que possuem material. Essa representação é construída através da definição de uma densidade de corte, onde são apresentados somente os elementos cuja soma das densidades nodais ultrapasse 1 ou a densidade nodal máxima esteja acima de 0,98.

FIGURA 42 – BARRA SOB TRAÇÃO: ERRO RELATIVO PERCENTUAL GLOBAL X NÚMERO DE VARIÁVEIS DE PROJETO.



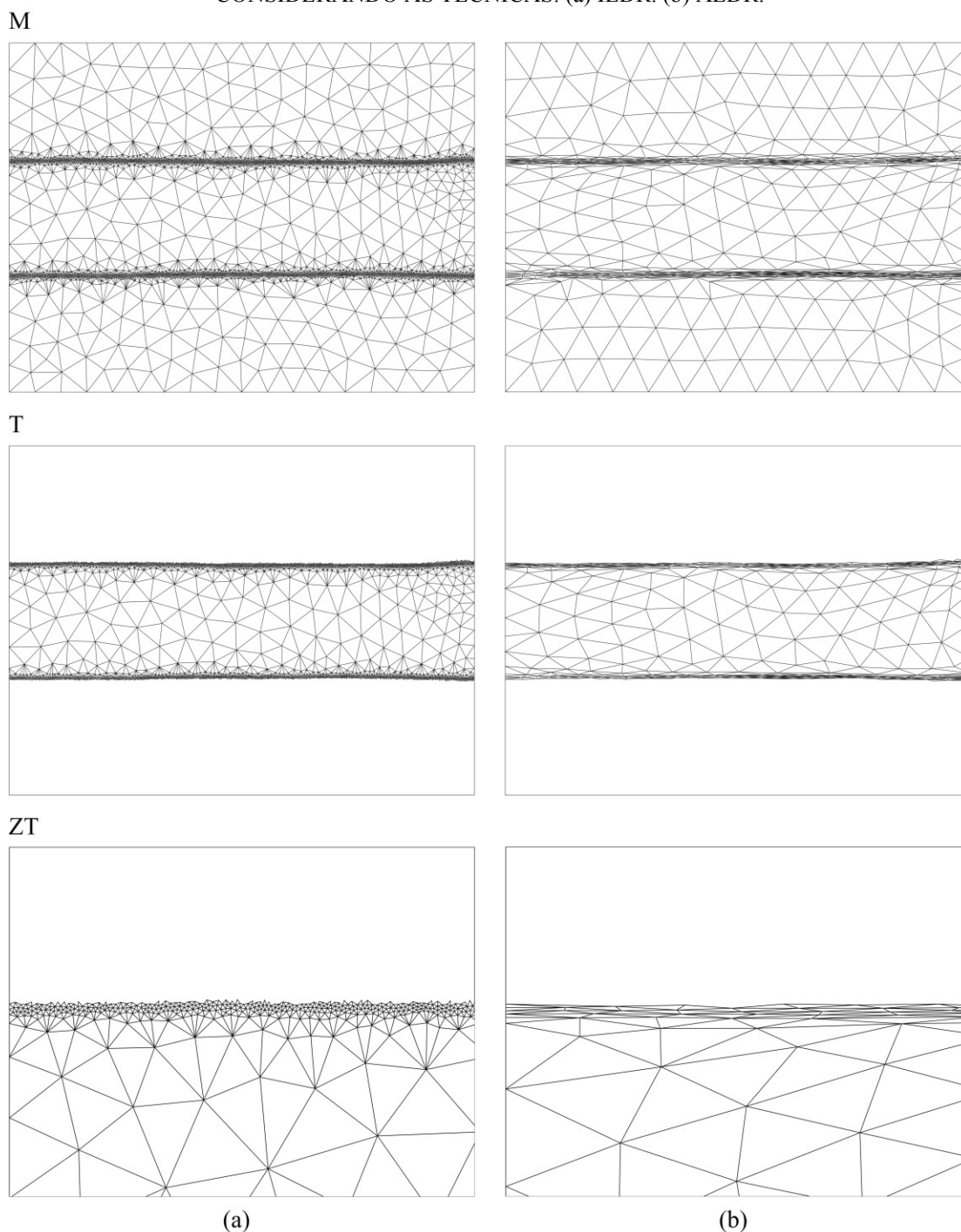
FONTE: O autor (2017).

Embora ambas as técnicas sejam efetivas no controle dos erros de discretização (FIGURA 42) e na obtenção simultânea de uma topologia bem definida (FIGURA 43), nota-se que os mecanismos utilizados são diferentes. A técnica IEDR baseia-se na definição e construção de elementos isotrópicos, sendo assim, mais simples. Por outro lado, a técnica

AEDR considera informações das direções principais dos erros e busca o controle dos erros com elementos distorcidos e adequadamente orientados. Tais características são observadas na vista ampliada da topologia (FIGURA 43 – ZT) na região $[0,0; 1,2] \times [1,5; 2,4]$.

Essas características conduzem a uma taxa de convergência significativamente maior para a técnica AEDR, que, em contrapartida, emprega um maior número de iterações adaptativas.

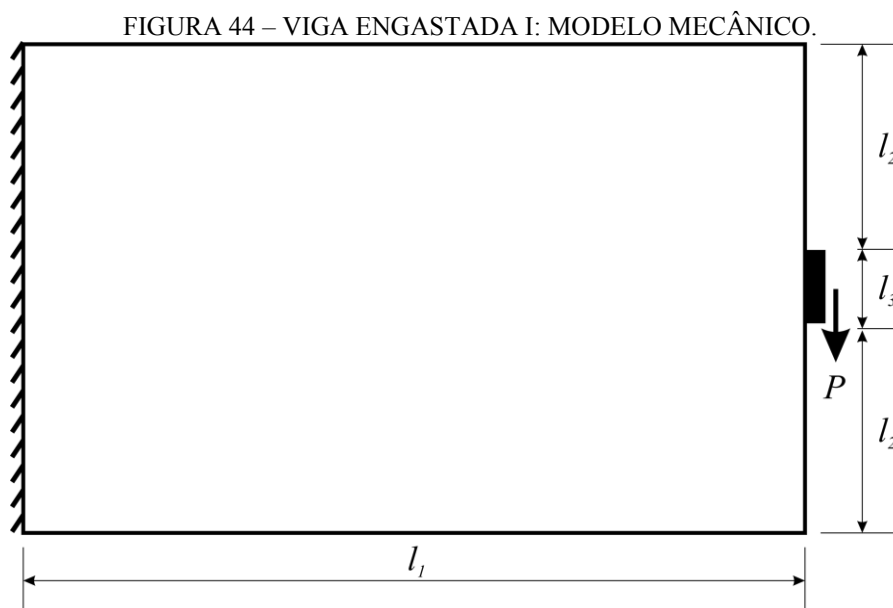
FIGURA 43 – BARRA SOB TRAÇÃO: ANÁLISE COMPARATIVA DAS TOPOLOGIAS FINAIS OBTIDAS CONSIDERANDO AS TÉCNICAS: (a) IEDR. (b) AEDR.



FONTE: O autor (2017).

7.3 VIGA ENGASTADA

Neste problema, busca-se o projeto ótimo de uma viga engastada em toda a aresta lateral esquerda e submetida a uma carga transversal na região central da extremidade direita (COSTA Jr.; ALVES, 2003; SILVA; PEREIRA, 2017). Na FIGURA 44, é apresentado o modelo mecânico e na TABELA 8 são expostos os parâmetros da análise.



FONTE: Adaptado de Silva e Pereira (2017).

TABELA 8 – VIGA ENGASTADA: PARÂMETROS INICIAIS.

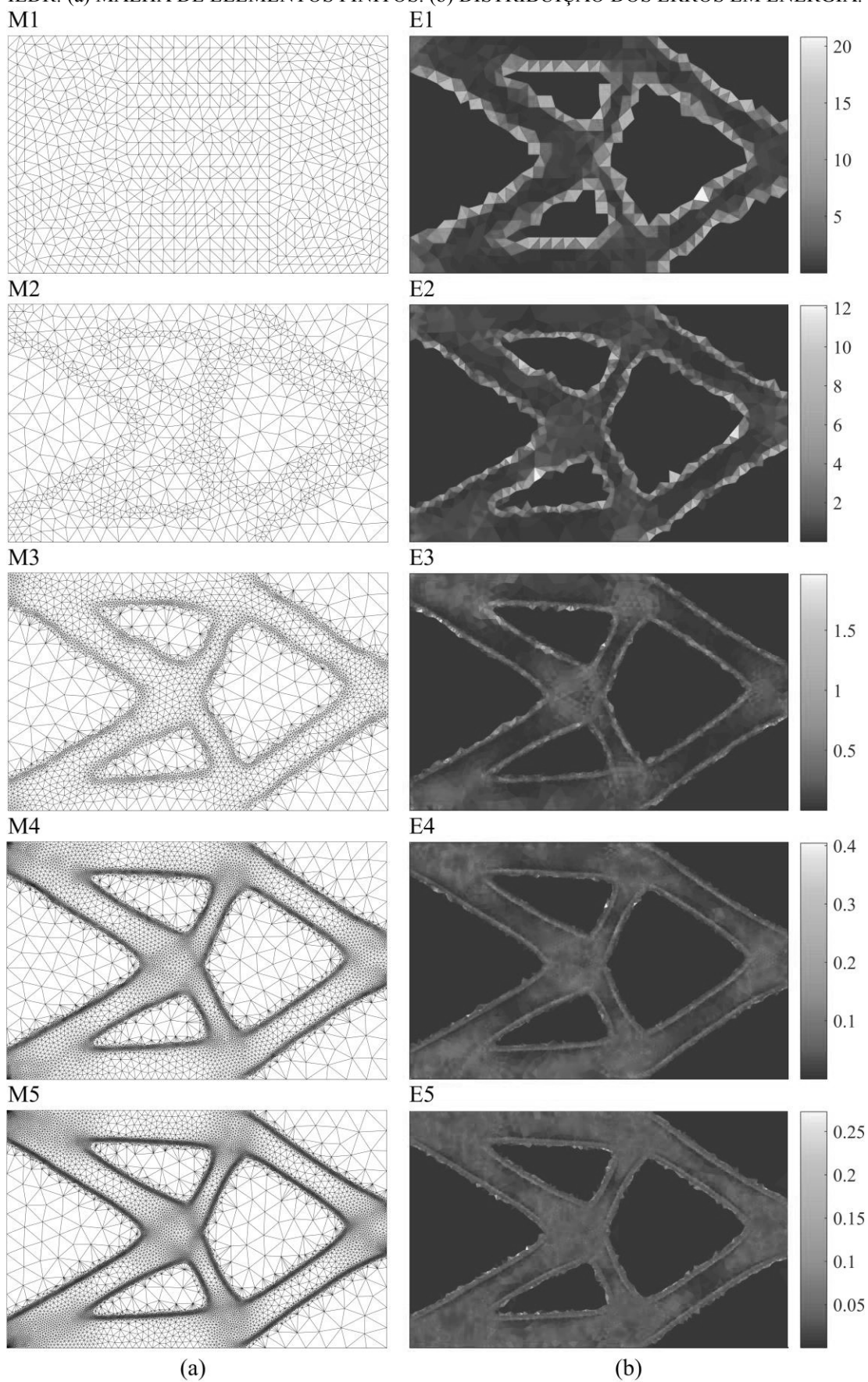
Variável	Valor (unidade)	Variável	Valor (unidade)	Variável	Valor (unidade)
λ	0,45	l_1	1,60 (m)	P	10 (MN)
E	200,00 (GPa)	ν	0,30	l_2	0,40 (m)
r_m	10,00 (kN.m)	r_ρ	3,00 (N.m)	$\bar{\alpha}$	4,00
FS_{max}	10,00	-	-	l_3	0,20 (m)

FONTE: O autor (2017).

7.3.1 Resultados IEDR

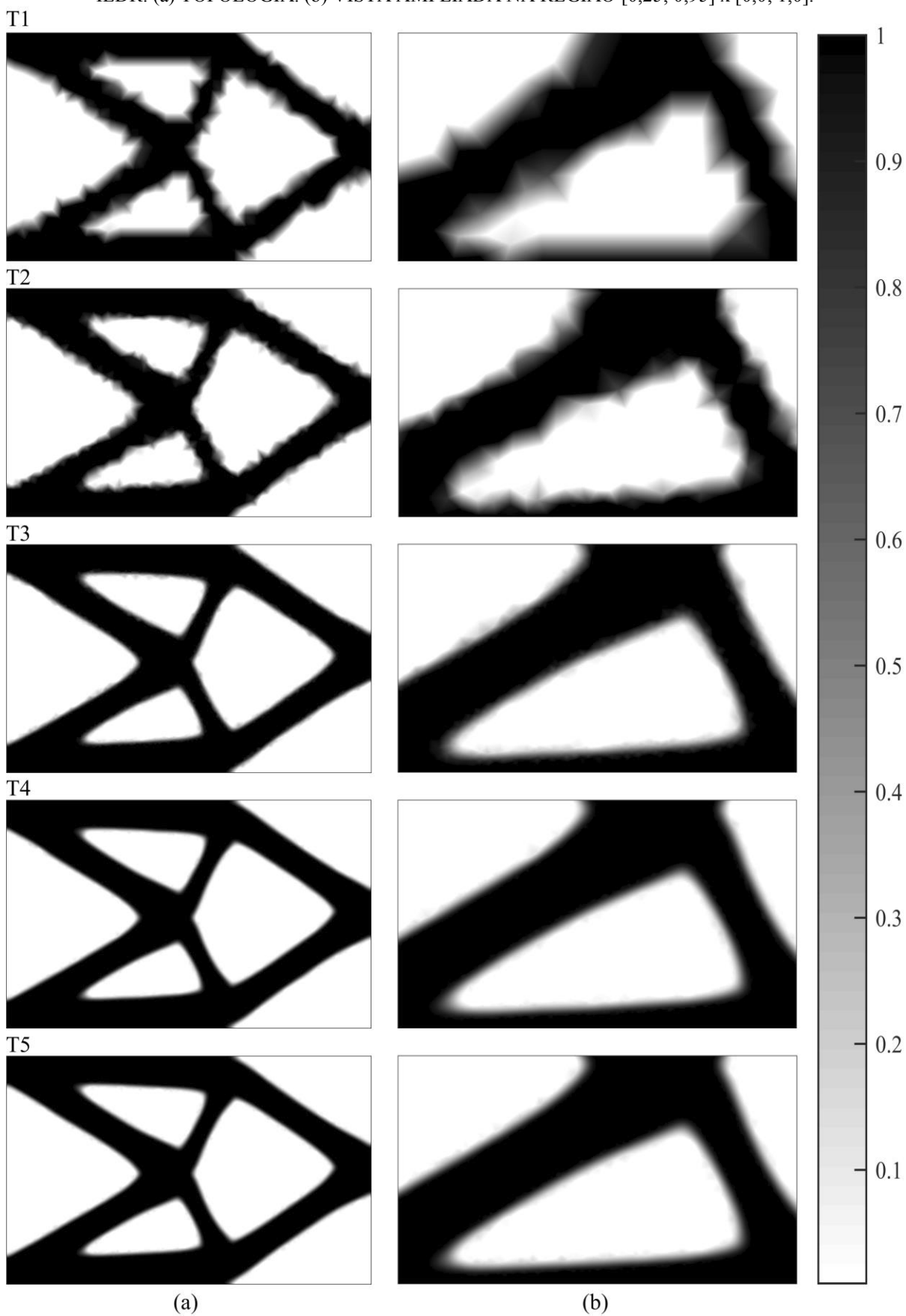
O processo de otimização é iniciado com uma malha quase uniforme possuindo 1468 elementos e 787 nós. A topologia resultante para esta malha possui $\eta_\sigma = 70,11\%$ e $\eta_\varepsilon = 18,27\%$. O erro relativo em energia requerido é de 5% da energia total do sistema. Na FIGURA 45 observa-se a sequência das malhas (M) geradas ao longo do processo de OETC empregando a técnica IEDR, bem como suas respectivas distribuições de erros em energia (E). A FIGURA 46 apresenta as topologias finais (T1 – T5) relativas às malhas M1 – M5.

FIGURA 45 – RESULTADOS AO FINAL DE CADA ITERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA E TÉCNICA IEDR: (a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (b) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 46 – RESULTADOS AO FINAL DE CADA ITERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA E TÉCNICA IEDR: (a) TOPOLOGIA. (b) VISTA AMPLIADA NA REGIÃO $[0,25; 0,95] \times [0,0; 1,0]$.



FONTE: O autor (2017).

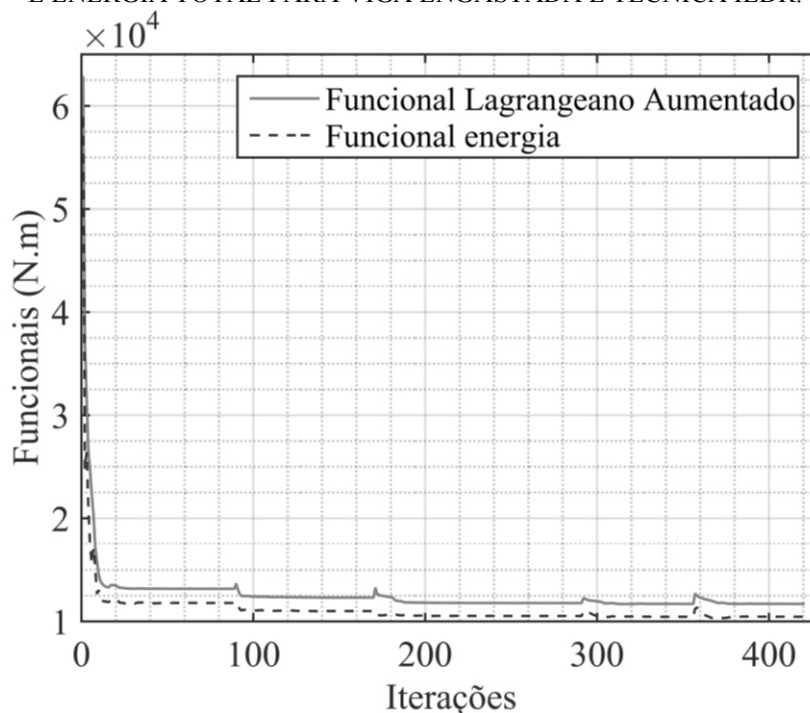
O processo de otimização conduz a uma malha final (M5) composta por 33263 elementos e 16779 nós. A topologia final (T5) possui $\eta_\sigma = 4,92\%$ e $\eta_\epsilon = 2,34\%$, atendendo ao erro prescrito de 5%. Em conformidade com os resultados da barra sob tração, tem-se:

- Maiores erros em energia ao longo da interface material-vazio (FIGURA 45(b) – E1), acarretando em malhas com um número elevado de elementos nestas regiões (FIGURA 45(a) – M5).
- Satisfação do critério de convergência com uma topologia final (FIGURA 46 (a) – T5) bem definida e uma distribuição aproximadamente uniforme dos erros em energia (FIGURA 45(b) – E5).

Observa-se também, que a solução topológica para a viga engastada é mais complexa que a encontrada para o problema de barra sob tração. Esta, apresenta uma forma final com furos, cujos contornos podem ocasionar pontos com uma maior variação do campo de tensões. A análise da malha M5 mostra que, para uma aproximada equidistribuição dos erros em energia, elementos com menores dimensões são posicionados próximos a estas regiões.

Os históricos de convergência para os funcionais Lagrangeano Aumentado e energia total são expostos na FIGURA 47. O funcional energia converge para 10,46 kN.m, com restrição $h_v = 6e-5$.

FIGURA 47 – HISTÓRICOS DE CONVERGÊNCIA DOS FUNCIONAIS LAGRANGEANO AUMENTADO E ENERGIA TOTAL PARA VIGA ENGASTADA E TÉCNICA IEDR.

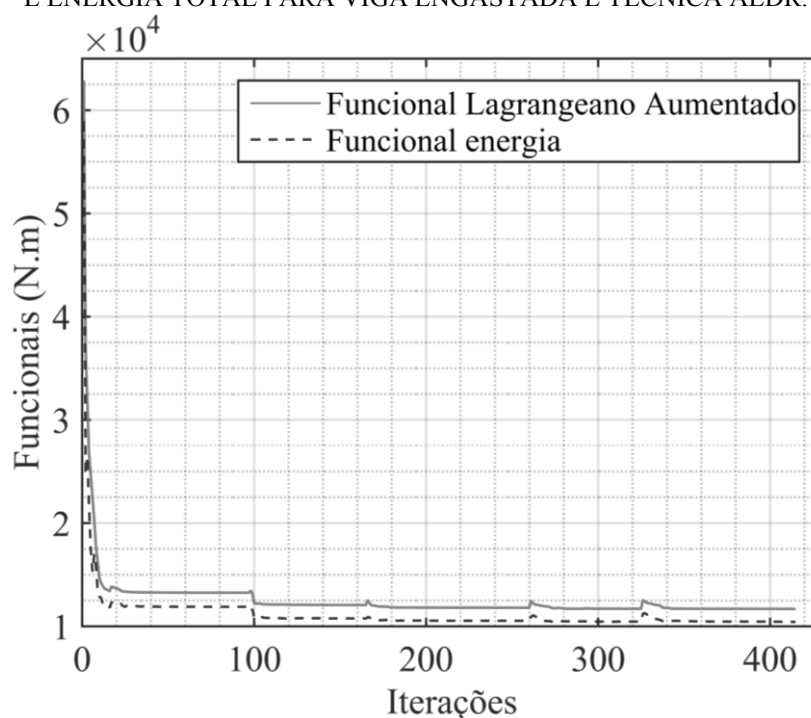


FONTE: O autor (2017).

7.3.2 Resultados AEDR

Iniciando de uma discretização de elementos finitos idêntica àquela empregada para a técnica IEDR, a técnica AEDR conduz a uma malha final (M5) com 8842 nós, conectados formando 17411 elementos. Os históricos do processo de otimização são apresentados na FIGURA 48. O funcional energia estabiliza em 10,43 kN.m, sendo a restrição sobre o volume avaliada em $4e-5$.

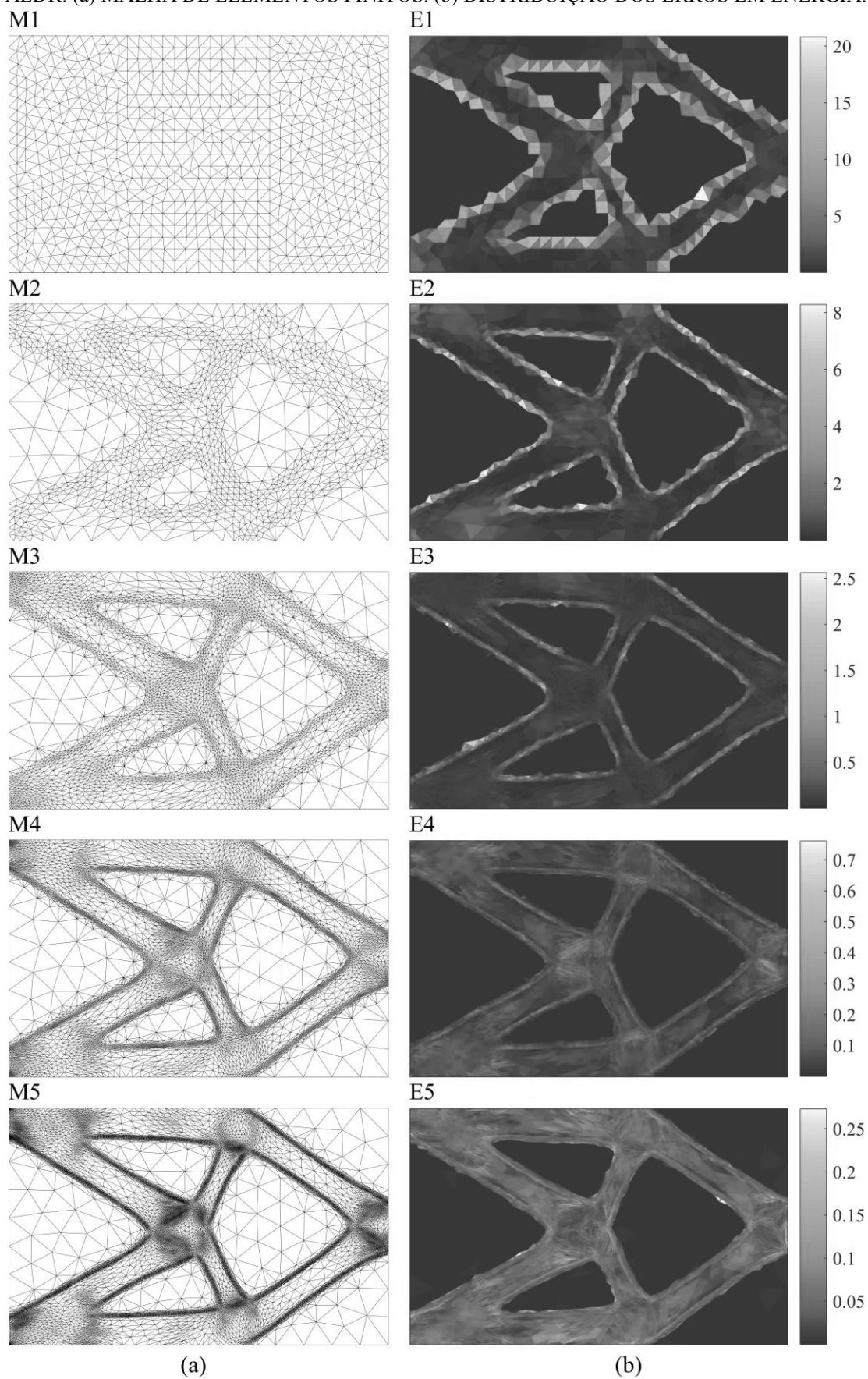
FIGURA 48 – HISTÓRICOS DE CONVERGÊNCIA DOS FUNCIONAIS LAGRANGEANO AUMENTADO E ENERGIA TOTAL PARA VIGA ENGASTADA E TÉCNICA AEDR.



FONTE: O autor (2017).

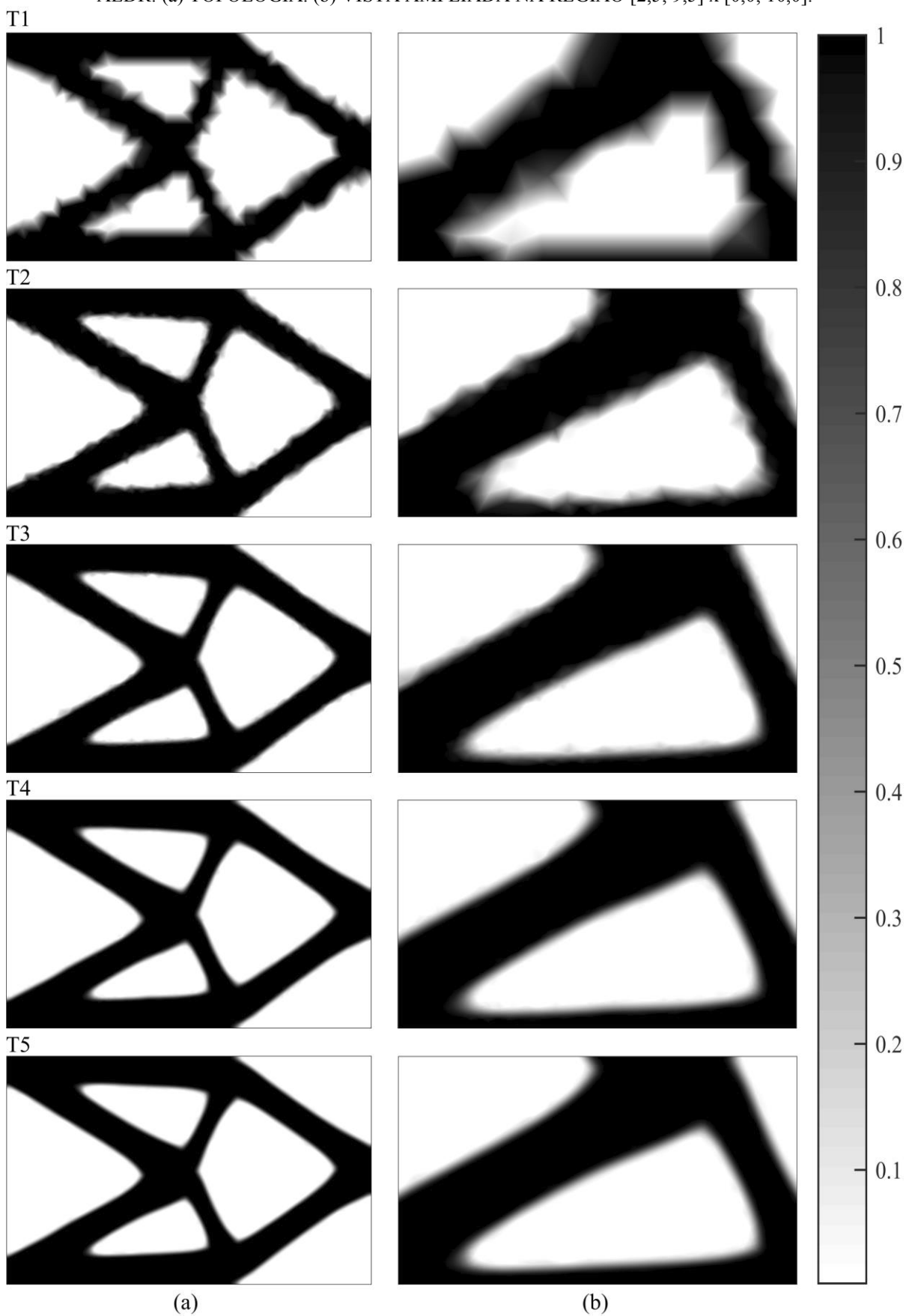
A sequência de malhas geradas (M1 – M5) e suas distribuições de erro em energia (E1 – E5), assim como as respectivas topologias resultantes (T1 – T5), são expostas na FIGURA 49 e FIGURA 50. Este exemplo utiliza um parâmetro limitador da modificação das dimensões da aresta, $\bar{\alpha}$, igual a 4. Como este parâmetro é maior que no caso da barra sob tração, a convergência sobre o erro é alcançada mais rapidamente, em apenas 4 iterações adaptativas. O erro relativo percentual, η_σ , para a malha M5 e topologia T5 é igual a 5,02 %, com $\eta_\epsilon = 4,14\%$. Devido à proximidade com o valor prescrito de 5%, optou-se por não realizar mais um passo de refino.

FIGURA 49 – RESULTADOS AO FINAL DE CADA ITERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA E TÉCNICA AEDR: (a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (b) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA.



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 50 – RESULTADOS AO FINAL DE CADA ITERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA E TÉCNICA AEDR: (a) TOPOLOGIA. (b) VISTA AMPLIADA NA REGIÃO $[2,5; 9,5] \times [0,0; 10,0]$.



FONTE: O autor (2017).

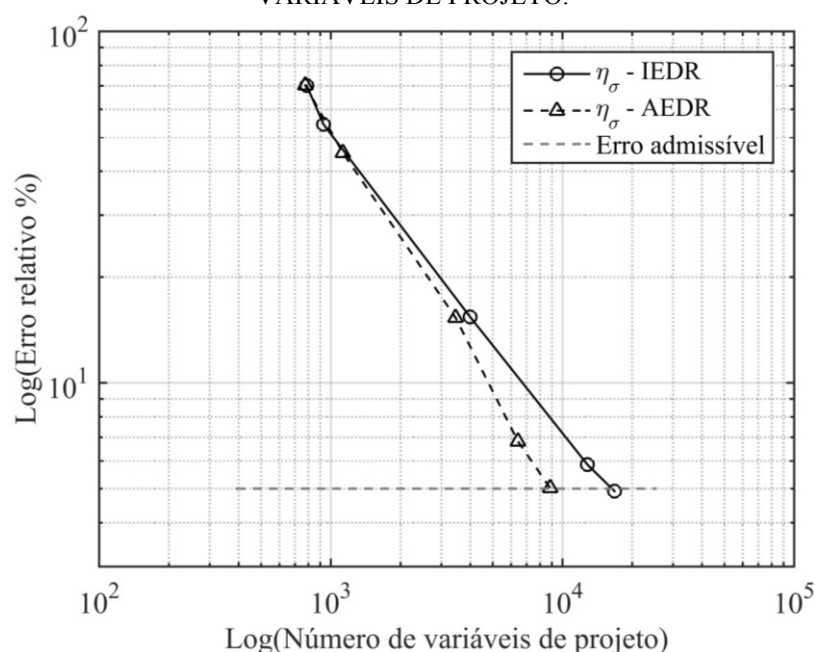
Percebe-se, novamente, que o controle dos erros de discretização fornecido pela técnica AEDR ocasiona elementos alinhados com o contorno material. Porém, em comparação com o problema de barra sob tração, o aparecimento de contornos curvos acarretou em uma menor diferença entre o número de variáveis de projeto final das técnicas IEDR e AEDR. Para este problema a redução é de aproximadamente 2 vezes.

Além disso, embora a topologia ao final da primeira iteração (T1) não apresente uma boa definição do contorno material, a adaptação progressiva da solução produz uma solução com contornos suficientemente suaves. Naturalmente, a definição de um erro admissível menor, conduzirá a um aumento no número de variáveis de projeto e, conseqüentemente, a uma melhor definição da interface material-vazio e ao aumento do custo computacional.

7.3.3 Comparação das técnicas h-adaptativas

Esta Subseção tem como objetivo uma análise comparativa entre técnicas h-adaptativas para o problema de viga engastada. O histórico de convergência do erro relativo percentual η_σ é apresentado na FIGURA 51, onde é identificada uma taxa de convergência mais acentuada para a metodologia anisotrópica.

FIGURA 51 – VIGA ENGASTADA: ERRO RELATIVO PERCENTUAL GLOBAL X NÚMERO DE VARIÁVEIS DE PROJETO.



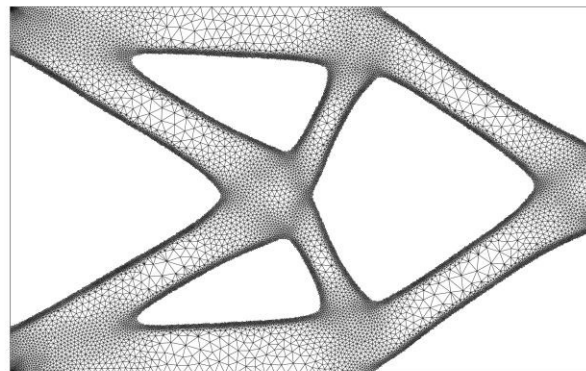
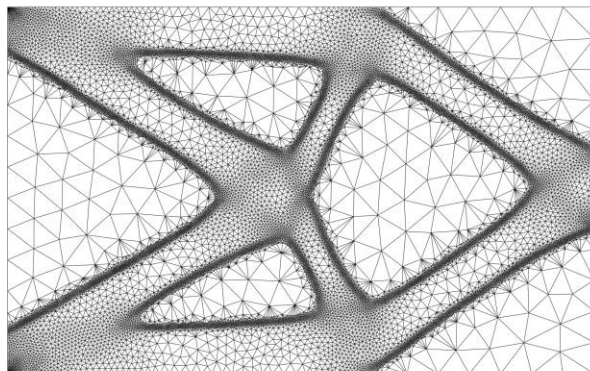
FONTE: O autor (2017).

Embora as topologias finais da estrutura obtida por ambas as técnicas sejam bem definidas, conforme apresentadas na FIGURA 46 e FIGURA 50, a exposição simultânea das malhas e das topologias considerando densidades de corte em regiões específicas da estrutura, a quais são exibidas na FIGURA 52, FIGURA 53 e FIGURA 54, auxiliam na comparação dos resultados encontrados.

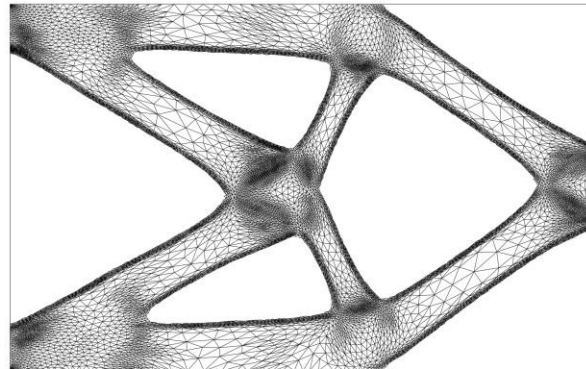
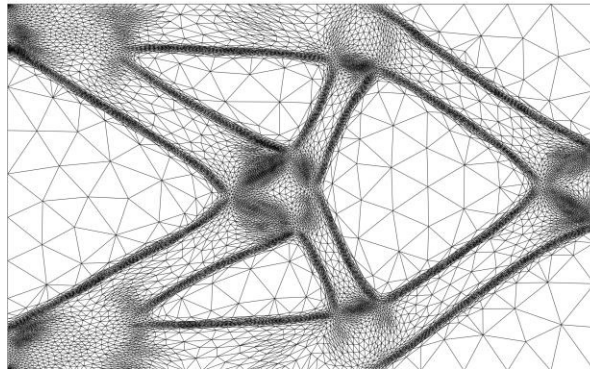
Neste sentido, as duas técnicas concentram elementos nas junções da estrutura otimizada, bem como na interface material-vazio. Por outro lado, é possível concluir que, para um mesmo nível de erro admissível e com aproximadamente metade do número de variáveis de projeto, a técnica AEDR conduz a uma melhor resolução do contorno material. Tal característica é oriunda da utilização de elementos com médias razões de aspecto, os quais possuem suas menores dimensões orientadas ao longo da interface material-vazio.

FIGURA 52 – VIGA ENGASTADA: ANÁLISE COMPARATIVA DAS TÉCNICAS IEDR E AEDR: (a) MALHAS FINAIS DE ELEMENTOS FINITOS. (b) TOPOLOGIAS FINAIS.

IEDR



AEDR



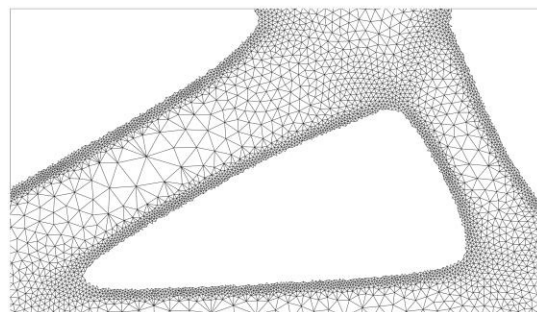
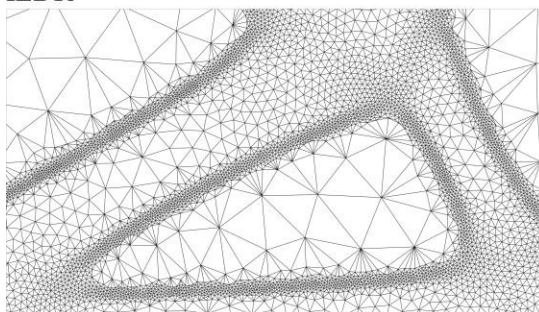
(a)

(b)

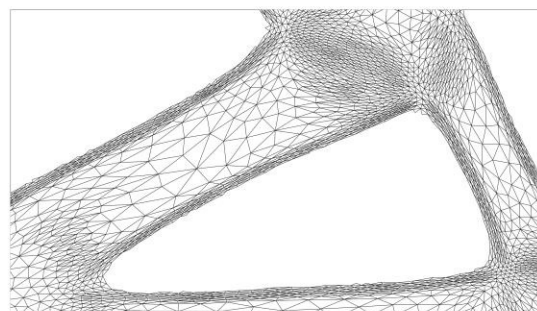
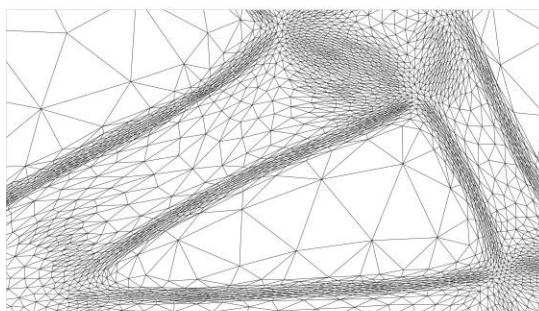
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 53 – VIGA ENGASTADA: ANÁLISE COMPARATIVA DAS TÉCNICAS IEDR E AEDR COM VISTA AMPLIADA NA REGIÃO $[2,5; 9,5] \times [1,0; 5,0]$: (a) MALHAS FINAIS DE ELEMENTOS FINITOS. (b) TOPOLOGIAS FINAIS.

IEDR



AEDR



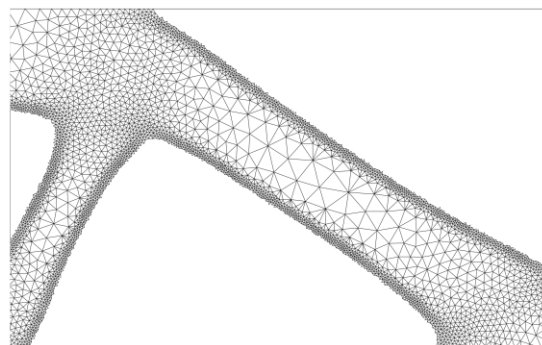
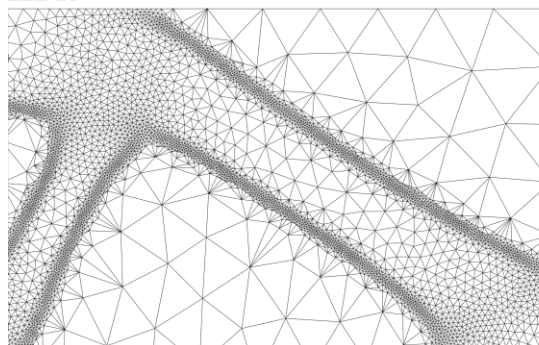
(a)

(b)

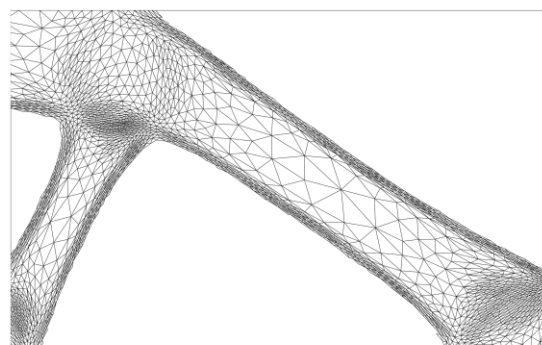
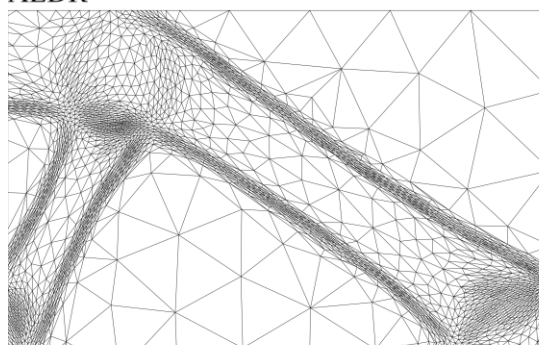
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 54 – VIGA ENGASTADA: ANÁLISE COMPARATIVA DAS TÉCNICAS IEDR E AEDR COM VISTA AMPLIADA NA REGIÃO $[8,0; 14,5] \times [1,5; 8,5]$: (a) MALHAS FINAIS DE ELEMENTOS FINITOS. (b) TOPOLOGIAS FINAIS.

IEDR



AEDR



(a)

(b)

FONTE: O autor (2017).

Ademais, é realizada uma análise comparativa dos valores do funcional energia, dos deslocamentos verticais em pontos próximos à aplicação das forças de contorno e dos estados de tensões oriundos das topologias otimizadas. Inicialmente, considera-se como referência uma malha quase uniforme (M1 – FIGURA 45(a)) com um ponto inicial de otimização formado por um conjunto de variáveis de projeto com densidades intermediárias idênticas e satisfazendo a restrição de 45% sobre o volume total da estrutura. Esta configuração possui uma energia de 58,80 kN.m com deslocamento vertical médio no ponto A de 11,81 mm. Neste caso, o ponto A possui coordenadas $x = 1,60$ e $y = 0,50$, e o deslocamento vertical médio é calculado através da média simples dos três valores nodais de deslocamentos verticais mais próximos a este ponto.

Na FIGURA 55 observa-se uma comparação das estruturas deformadas (FIGURA 55(a)) e suas respectivas distribuições de tensões segundo von Mises (FIGURA 55(b)), considerando as topologias convergentes da malha inicial e das malhas finais segundo as técnicas IEDR e AEDR. Além disso, na TABELA 9 são expostos alguns parâmetros comparativos das soluções topológicas encontradas.

TABELA 9 – VIGA ENGASTADA: ANÁLISE COMPARATIVA DOS DESLOCAMENTOS, ENERGIA E TENSÕES NAS TOPOLOGIAS OTIMIZADAS PELAS TÉCNICAS IEDR E AEDR.

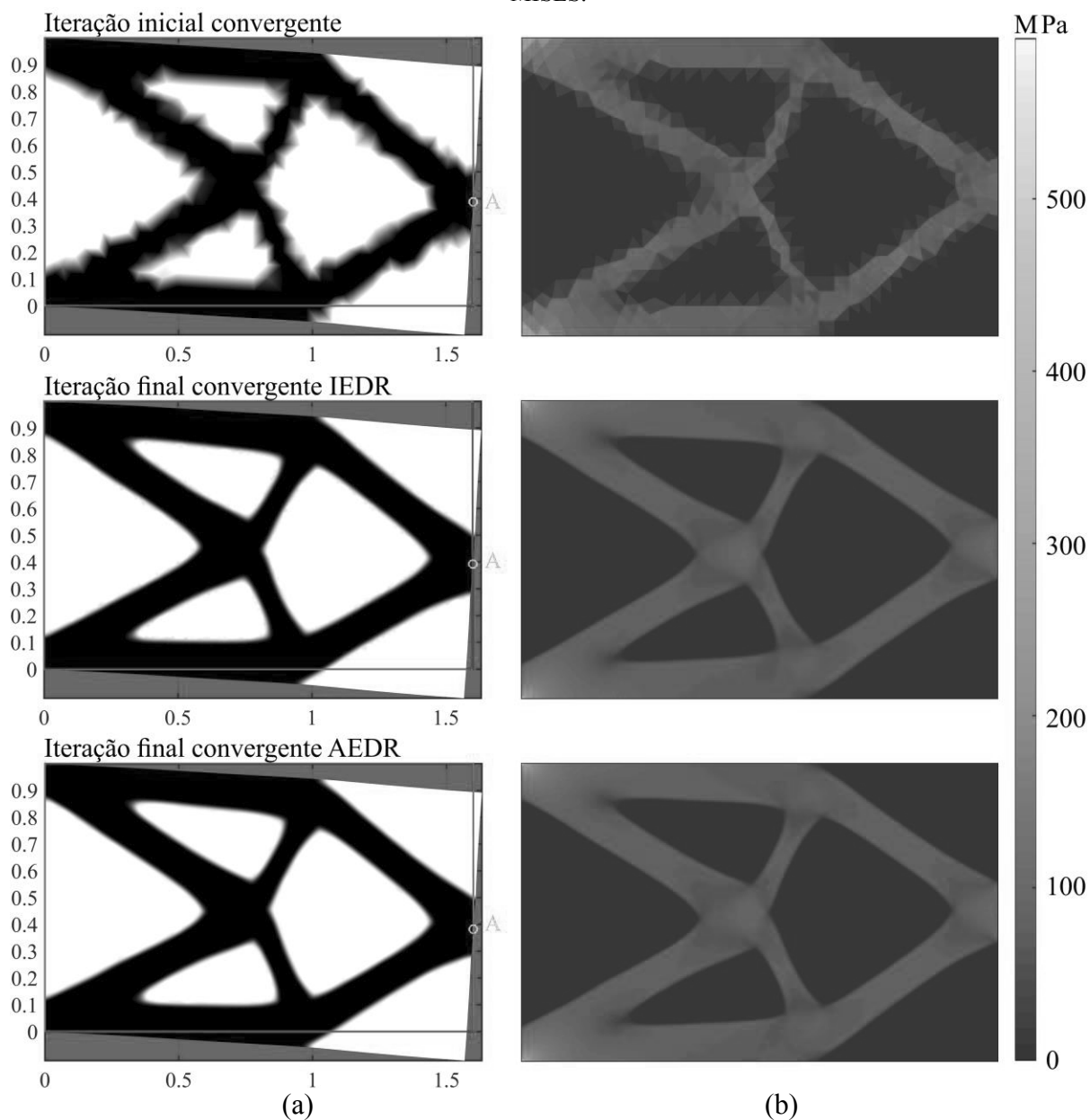
Variável	Topologia Final		
	Malha inicial	IEDR	AEDR
Deslocamento vertical médio próximo ao ponto A (mm)	2,36	2,09	2,09
Máxima tensão de von Mises (MPa)	265,88	592,44	565,65
Funcional energia (kN.m)	11,79	10,46	10,43
Redução (%) do funcional energia em relação ao ponto inicial de otimização da malha M1	79,95	82,21	82,26
Redução (%) do deslocamento vertical médio próximo ao ponto A em relação ao ponto inicial de otimização da malha M1	80,02	82,30	82,30

FONTE: O autor (2017).

Quanto a estrutura deformada (FIGURA 55(a)), com base nos valores apresentados na TABELA 9, algumas considerações podem ser elencadas:

- As técnicas IEDR e AEDR, considerando um erro admissível idêntico (5%), convergem para valores próximos no que se refere ao deslocamento vertical médio (ponto A) e ao funcional energia de deformação. Além disso, estes valores são menores do que os encontrados para a topologia gerada através da malha inicial e, portanto, a estrutura otimizada via adaptatividade de malha é mais rígida.

FIGURA 55 – VIGA ENGASTADA: ANÁLISE COMPARATIVA DAS TÉCNICAS IEDR E AEDR (a) TOPOLOGIAS FINAIS DEFORMADAS. (b) DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES ELEMENTARES DE VON MISES.



FONTE: O autor (2017).

- Tendo como referência os valores do funcional energia (58,80 kN.m) e dos deslocamentos verticais no ponto A (11,81 mm) obtidos considerando a malha inicial no processo de otimização, percebem-se reduções da ordem de 80% para as estruturas otimizadas. Tal fato comprova que a estrutura final possui uma menor flexibilidade do que a estrutura inicial que satisfaz a restrição sobre o volume. Além disso, cabe mencionar que as reduções percentuais do funcional energia de deformação e dos deslocamentos verticais no ponto A são aproximadamente iguais. Com isso, nota-se que a equivalência entre trabalho externo e energia de deformação é satisfeita. Este

fato, é mais um apontamento sobre a ótima funcionalidade do algoritmo implementado.

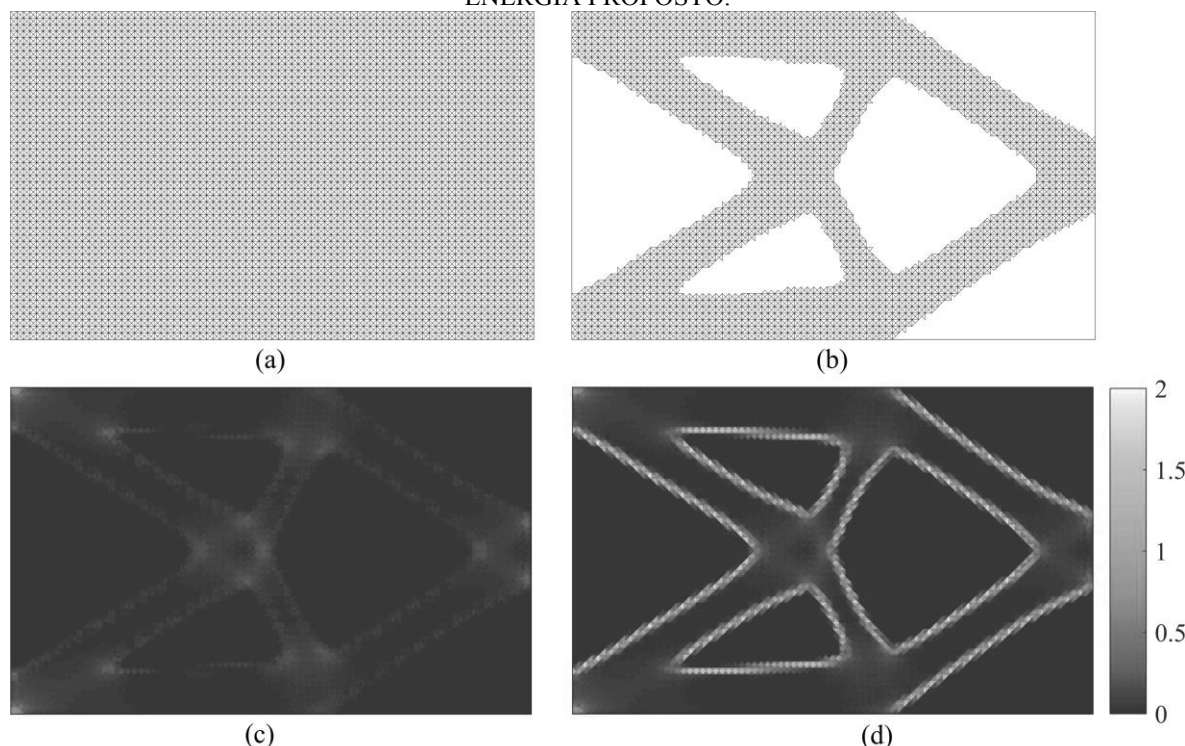
Quanto aos estados de tensões apresentados, cabe mencionar que as tensões são avaliadas considerando uma microestrutura SIMP. Na FIGURA 55(b), visualizam-se distribuições de tensões aproximadamente uniformes ao longo dos elementos estruturais formados, com maiores variações nas junções dos elementos estruturais. Além disso, as regiões de vazios, definidas a partir de uma densidade relativa mínima igual a 0,01, possuem baixos valores de tensões. Tais variações justificam as malhas adaptadas geradas pelas técnicas IEDR e AEDR (FIGURA 52). Na TABELA 9 são apresentados os valores máximos de tensão de von Mises para cada uma das configurações em discussão, os quais estão localizados próximos aos vértices inferior e superior da extremidade esquerda da estrutura base. É possível notar que tem-se um menor valor de tensão máxima para a malha inicial. Porém, como esta malha é relativamente grosseira, espera-se que esse valor não seja bem avaliado para os pontos em questão. A condução de um processo h-adaptativo considerando duas distantes técnicas, mostra que o valor máximo da tensão de von Mises encontra-se acima de 500 MPa. Embora, no âmbito da engenharia estes valores sejam elevados, o processo de otimização aqui tratado pode conduzir a formas estruturais que resultem em altos valores de tensão, pois esse processo tem como objetivo simplesmente determinar a configuração estrutural que minimize a flexibilidade da estrutura tendo como restrição o volume total.

7.3.4 Resultados para uma malha uniforme

Esta Subseção tem como objetivo demonstrar que a aplicação das técnicas h-adaptativas, de acordo com o esquema proposto, converge para uma solução topológica próxima àquela obtida para uma malha fixa, fina, uniforme e regular. Assim, o processo de otimização é realizado com base nos parâmetros de otimização da TABELA 8. A malha empregada possui 8131 nós conectados segundo um padrão *criss x cross* (BABUSKA et al., 1994), formando 16000 elementos [80 x 50]. Os resultados gráficos são apresentados na FIGURA 56.

O processo de otimização converge para uma topologia com $\eta_{\sigma} = 24,72\%$, $\eta_{\varepsilon} = 4,85\%$ e energia total de 10,61 kN.m. Cabe ressaltar que o número de variáveis de projeto empregado nesta solução é próximo daquele utilizado pela última malha do processo h-adaptativo via técnica AEDR e, duas vezes menor que o da técnica IEDR. Portanto, algumas considerações podem ser elencadas:

FIGURA 56 – VIGA ENGASTADA: RESULTADOS PARA UMA MALHA UNIFORME: (a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (b) TOPOLOGIA FINAL VIA DENSIDADE DE CORTE. (c) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA BASEADOS EM DEFORMAÇÕES. (d) DISTRIBUIÇÃO DOS ERROS EM ENERGIA PROPOSTO.



FONTE: O autor (2017).

- Dada a relação matemática conhecida *a priori* para ao erro segundo a norma em energia ($\|e\| \leq Ch^p$) e, admitindo que a redução no erro seja da ordem de 5 vezes (ou seja, o tamanho h de cada elemento diminui 5 vezes e sua área 25 vezes), o número de elementos necessários para atingir 5% de erro em energia com uma malha uniforme é de aproximadamente 400000 elementos. Assim, em relação a uma malha uniforme, a técnica AEDR utiliza cerca de 25 vezes menos elementos e a técnica IEDR 12 vezes, para um nível de erro final idêntico.
- A definição do contorno material obtida através da aplicação das técnicas h-adaptativas (FIGURA 46 e FIGURA 50) é superior ao encontrado para uma malha fixa e uniforme (FIGURA 56(b) e (c)).
- Embora o erro relativo em energia, η_σ , considerando a solução adaptada seja cerca de 5 vezes menor que o encontrado para a malha uniforme, confrontando os valores de energia total obtidos, a diferença é de aproximadamente 2%. Porém, como o funcional energia é calculado com base em um campo de deformações ou tensões “sem” considerar a abrupta variação das propriedades materiais (ou seja, dependem somente de D_ρ avaliado no baricentro do elemento), assume-se que a diferença no valor do

funcional energia possa estar ligada aos erros avaliados segundo η_ε . Neste caso, as diferenças em η_ε entre a malha uniforme e as adaptadas são menores, sendo de 2,51% para a técnica IEDR e 0,71% para a técnica AEDR.

Ademais, na FIGURA 56 é apresentada a distribuição dos erros em energia baseada no campo de deformações (Eq. (167) e FIGURA 56(d), comumente encontrada na literatura) e no campo de tensões com inserção da variação das propriedades materiais (Eq. (166) e FIGURA 56(e)). Percebe-se que a diferença existente está em regiões de variação do campo de densidades. Tal característica, conforme demonstrado anteriormente, permite conduzir, através de um processo h-adaptativo, a obtenção de uma interface material vazio tão suave quanto for a diminuição da tolerância sobre os erros de discretização.

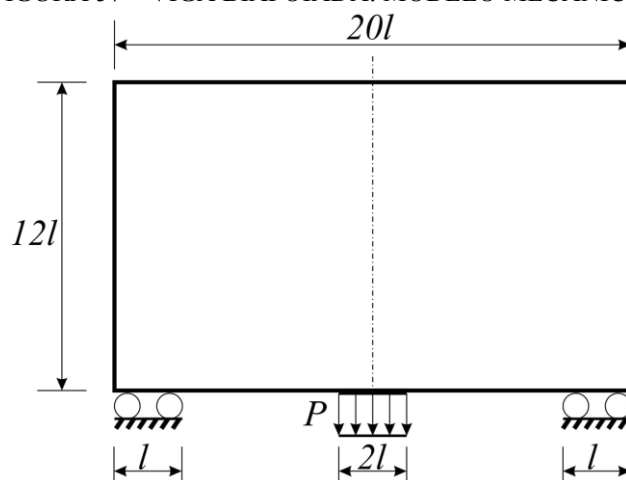
Outra importante propriedade é quanto ao processo de otimização empregado (PEREIRA, 2001; FANCELLO; PEREIRA, 2003; PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004). Frente as diferentes malhas utilizadas, conclui-se que este é efetivo no controle do fenômeno de tabuleiro de xadrez e na inibição de extensas regiões de cinzas. Além disso, os resultados indicam pouca influência de malha, pois as configurações topológicas e os valores do funcional energia de deformação são próximas.

Por fim, os resultados expostos na FIGURA 56 atestam sobre a funcionalidade da implementação realizada, pois as soluções topológicas e distribuições dos erros mostram-se perfeitamente simétricas.

7.4 VIGA BIAPOIADA

O terceiro problema, denominado de viga biapoada, trata de um clássico problema de otimização estrutural com vistas a minimização da flexibilidade da estrutura (COSTA JR., 2003; COSTA JR.; ALVES, 2003; TOVAR; KHANDELWAL, 2013). Este consiste em uma estrutura retangular apoiada em ambas as extremidades laterais inferiores e submetida a uma carga concentrada na região central da extremidade inferior. Com o intuito de evitar singularidades devido à aplicação do carregamento concentrado, o modelo mecânico (FIGURA 57) é construído considerando uma carga distribuída ao longo de uma pequena região central. O modelo de elementos finitos é formado com base na simetria em relação ao eixo vertical, utilizando somente a parcela à direita do eixo de simetria. Os parâmetros do problema são expostos na TABELA 10.

FIGURA 57 – VIGA BIAPOIADA: MODELO MECÂNICO.



FONTE: O autor (2017).

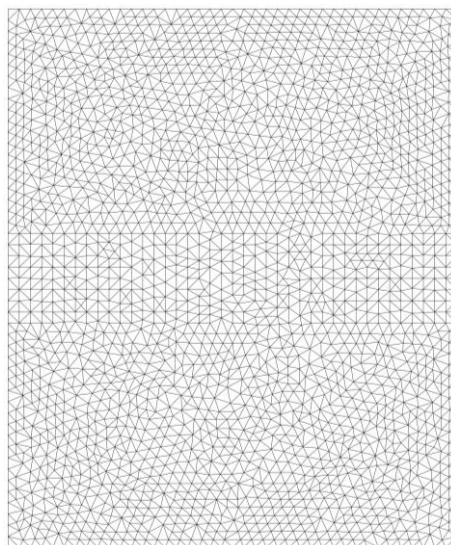
TABELA 10 – VIGA BIAPOIADA: PARÂMETROS INICIAIS.

Variável	Valor (unidade)	Variável	Valor (unidade)	Variável	Valor (unidade)
λ	0,30	l	1,00 (m)	P	1,00 (N)
E	1,00 (Pa)	ν	0,30	$\bar{\alpha}$	3,00
r_m	0,03 (N.m)	FS_{max}	10,00	-	-

FONTE: O autor (2017).

Neste caso, o objetivo é discutir a interferência do termo regularizador de tabuleiro de xadrez (Eq. (20)), f_ρ , na construção da topologia ótima mediante o problema de mínima flexibilidade, restrição sobre o volume material e o MEF h-adaptativo. Para tal, considerando uma malha inicial (FIGURA 58) quase uniforme, composta por 4490 elementos e 2334 nós.

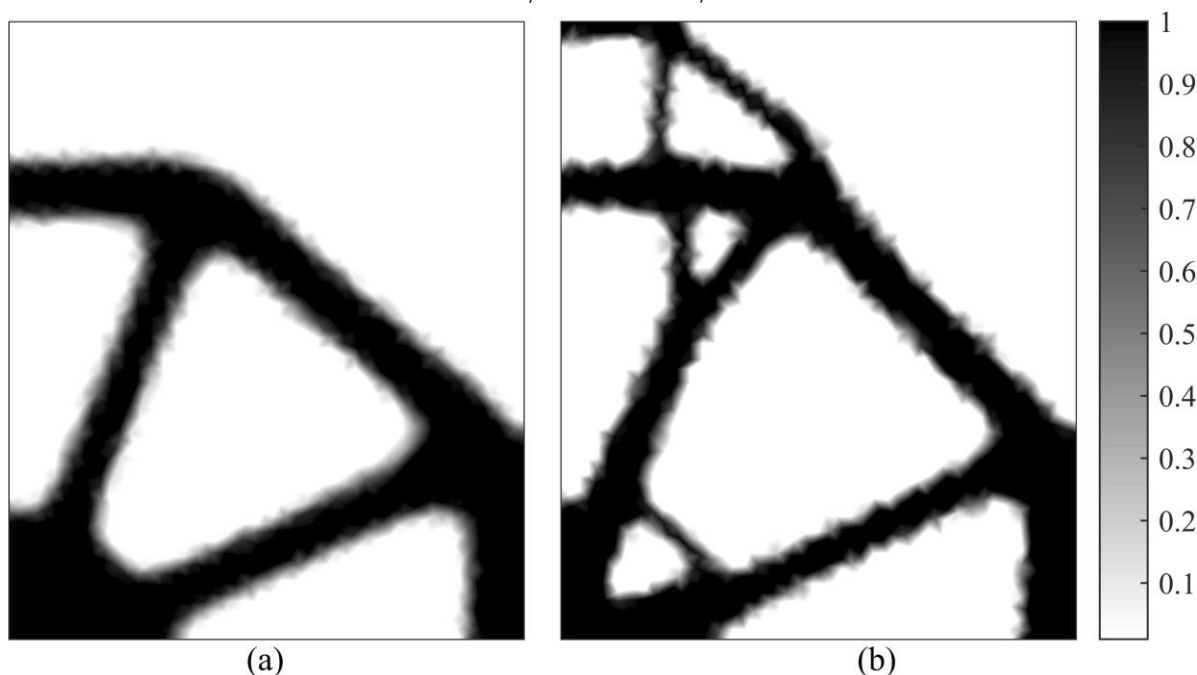
FIGURA 58 – VIGA BIAPOIADA: MALHA DE ELEMENTOS FINITOS INICIAL.



FONTE: O autor (2017).

A metodologia proposta é aplicada para dois valores do fator de penalização de f_ρ , ou seja, $r_\rho = 0,008$ e $r_\rho = 0,003$, cujas topologias resultantes dessa discretização são apresentadas na FIGURA 59(a) e FIGURA 59(b), respectivamente. Conforme constatado em Pereira (2001) e Pereira, Fancello e Barcellos (2004), para uma discretização de elementos finitos fixa, a topologia final é dependente dos valores adotados para r_ρ . Como este fator penaliza a variação do campo de densidades, a utilização de altos valores tende a inibir a criação de furos, podendo ocasionar o aparecimento de extensas regiões de cinza. Por outro lado, topologias complexas podem ser obtidas através de uma redução deste parâmetro.

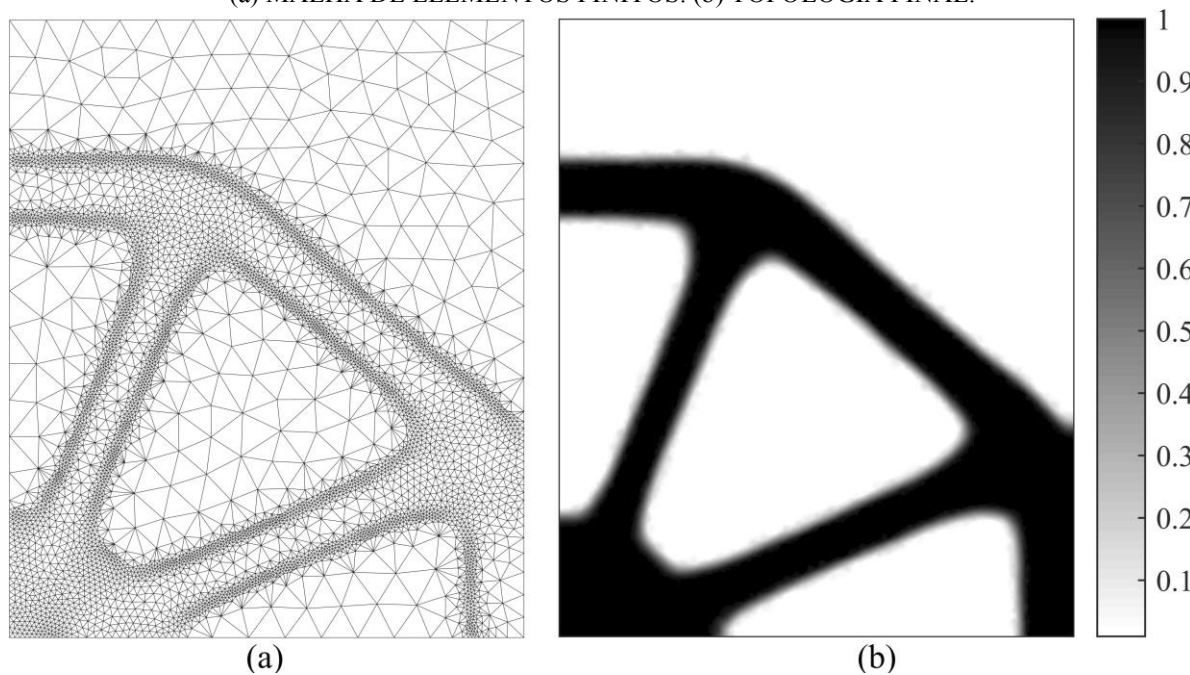
FIGURA 59 – VIGA BIAPOIADA, TOPOLOGIA FINAL AO TÉRMINO DA PRIMEIRA ITERAÇÃO PARA: (a) $r_\rho = 0,008$. (b) $r_\rho = 0,003$.



FONTE: O autor (2017).

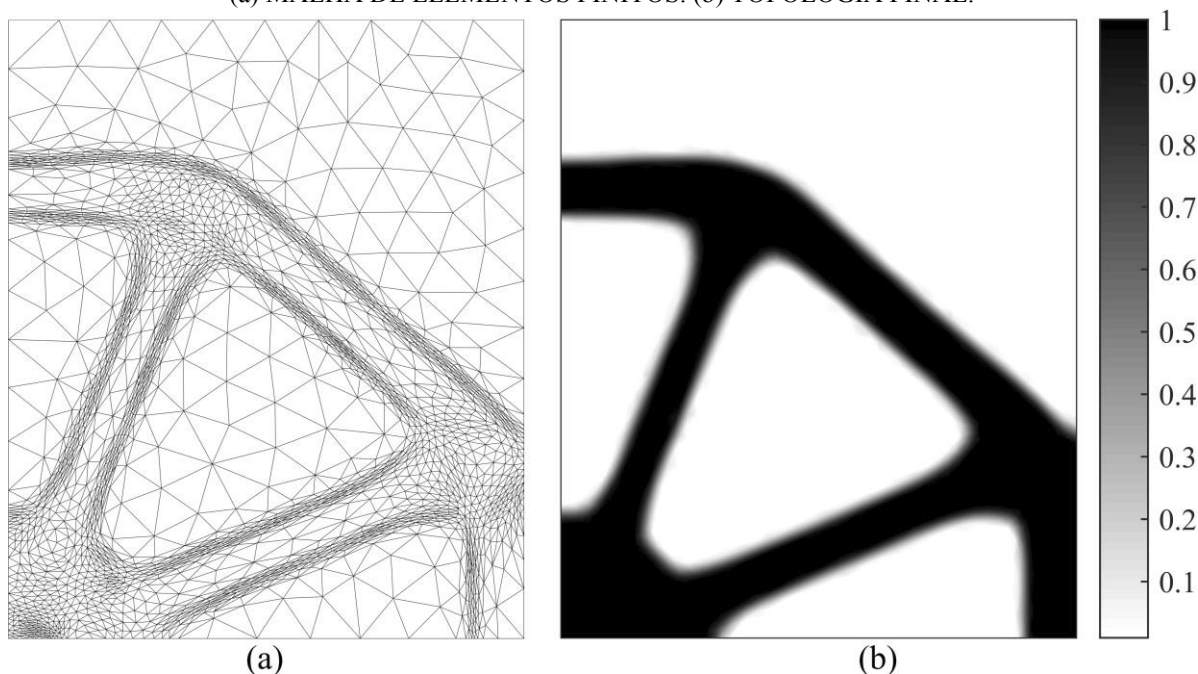
Soluções topológicas análogas àquelas obtidas para $r_\rho = 0,008$ (FIGURA 59(a)) são frequentemente encontradas na literatura. Com base nesta solução, é iniciado um processo h-adaptativo para as técnicas IEDR e AEDR com o objetivo de atingir um erro relativo em energia igual a 10%. As malhas finais, bem como suas distribuições ótimas de material são apresentadas na FIGURA 60 e FIGURA 61.

FIGURA 60 – VIGA BIAPOIADA E TÉCNICA IEDR PARA A SOLUÇÃO CONVERGENTE ($r_p = 0,008$):
(a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (b) TOPOLOGIA FINAL.



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 61 – VIGA BIAPOIADA E TÉCNICA AEDR PARA A SOLUÇÃO CONVERGENTE ($r_p = 0,008$):
(a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (b) TOPOLOGIA FINAL.



FONTE: O autor (2017).

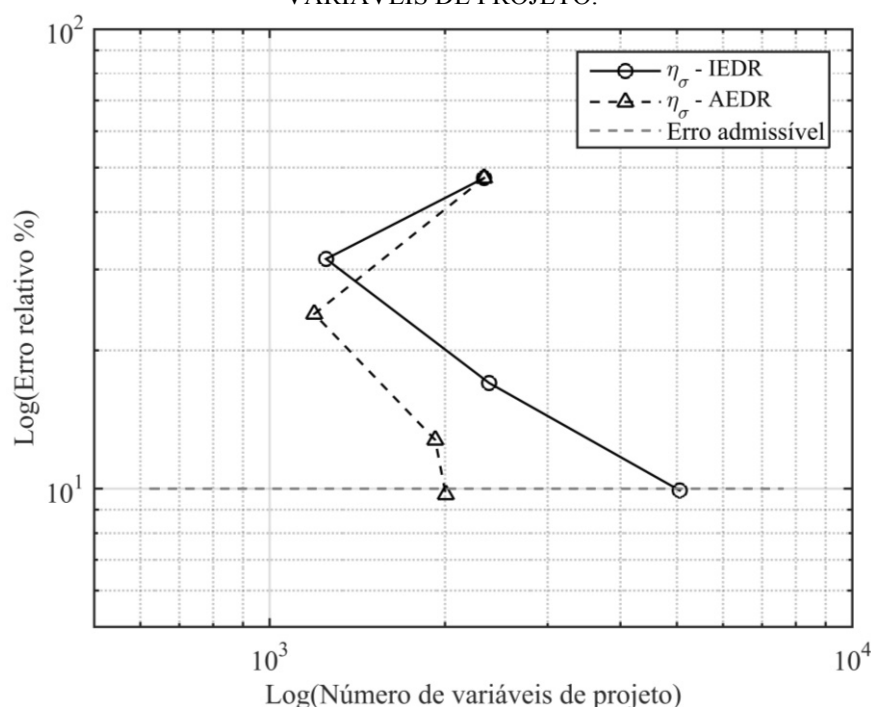
Observa-se que, embora seja prescrita uma tolerância relativamente elevada para o erro em energia, variações mais suaves das propriedades materiais são encontradas em relação a discretização inicial. A técnica IEDR conduz a uma malha composta por 9970 elementos,

5056 nós e $\eta_\sigma = 9,91\%$. Ao final de 368 iterações de busca e três etapas adaptativas, a energia total converge para 3,70 N.m. Por outro lado, a técnica AEDR exibe $\eta_\sigma = 9,71\%$, em uma malha com 2006 nós, formando 3888 elementos, cuja energia total estabiliza em 3,68 N.m. O processo de otimização converge em 360 iterações de busca e 3 iterações adaptativas.

Os históricos de convergência dos erros relativos em energia em função do número de variáveis de projeto para ambas as técnicas de refino podem ser visualizados na FIGURA 62. Adicionalmente, visando analisar a eficiência da técnica AEDR frente a estruturas mais complexas, um processo h-adaptativo é conduzido tendo como origem a topologia apresentada na FIGURA 59(b). A malha final (FIGURA 63(a)) é formada por 7163 elementos e 3662 nós. Esta resulta na topologia exibida na FIGURA 63(b), cujo erro relativo em energia é 9,54% e energia total 3,72 N.m. Neste caso, o processo de otimização é realizado em 572 iterações de busca, distribuídas ao longo de 4 refinamentos adaptativos.

Percebe-se que a diminuição do fator de penalização r_p pode conduzir à obtenção de uma estrutura mais complexa, acarretando em um processo de otimização com um maior número de iterações (PEREIRA, 2001). Detalhes de diferentes regiões para as soluções obtidas para a técnica AEDR são observados na FIGURA 64.

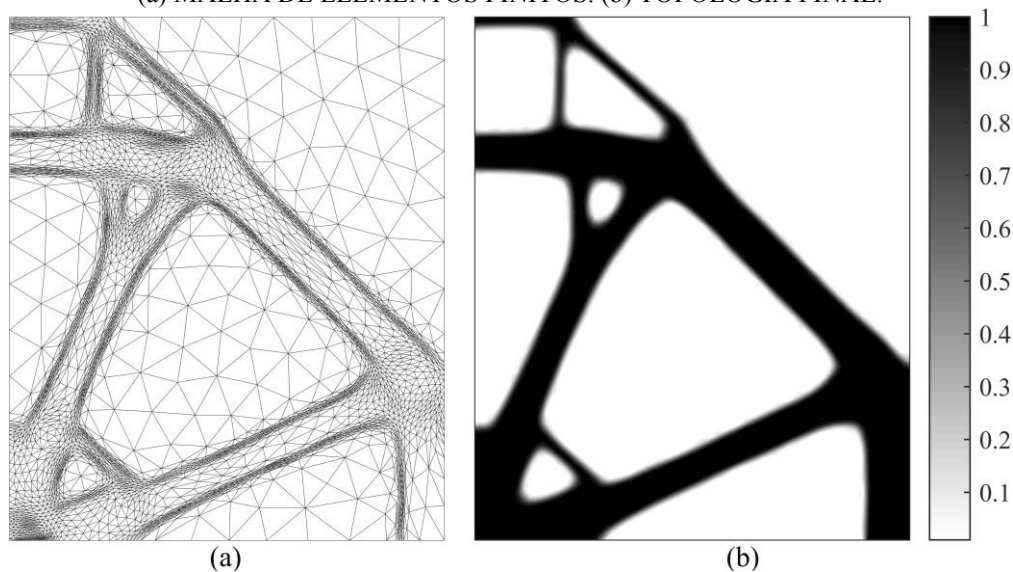
FIGURA 62 – VIGA BIAPOIADA: ERRO RELATIVO PERCENTUAL GLOBAL X NÚMERO DE VARIÁVEIS DE PROJETO.



FONTE: O autor (2017).

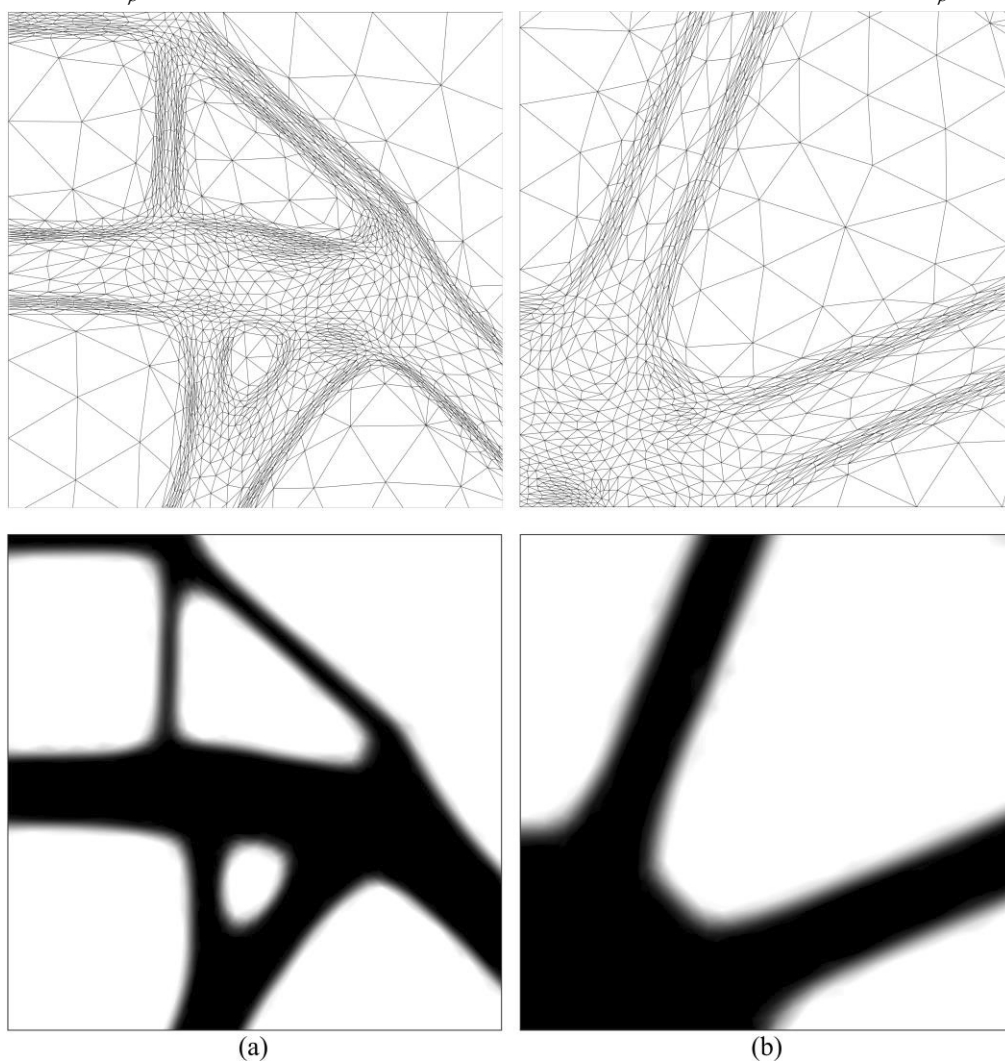
FIGURA 63 – VIGA BIAPOIADA E TÉCNICA AEDR PARA A SOLUÇÃO CONVERGENTE ($r_p = 0,003$):

(a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. (b) TOPOLOGIA FINAL.



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 64 – VIGA BIAPOIADA E TÉCNICA AEDR: (a) VISTA AMPLIADA NA REGIÃO $[0,0; 6,0] \times [6,0; 12,0]$ E $r_p = 0,003$. (b) VISTA AMPLIADA NA REGIÃO $[0,0; 6,0] \times [0,0; 6,0]$ E $r_p = 0,008$.

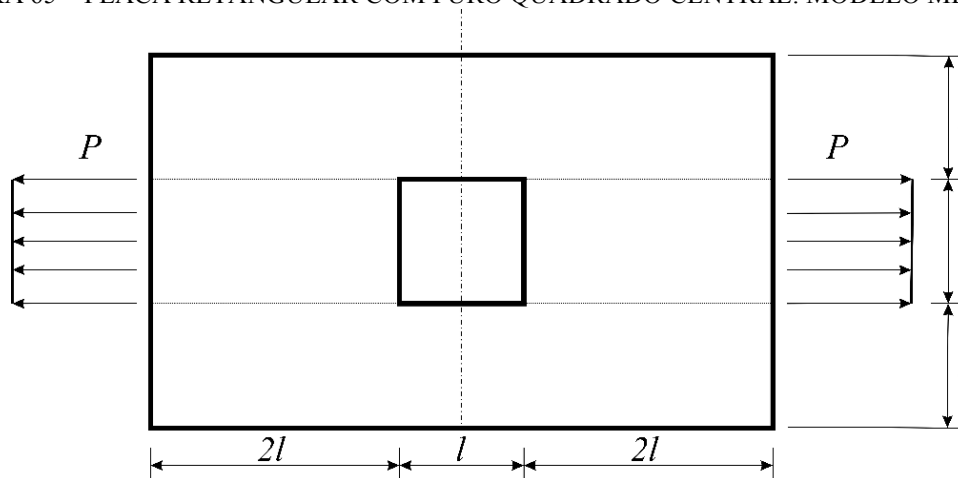


FONTE: O autor (2017).

7.5 PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL

Este problema, cujo modelo mecânico é representado na FIGURA 65, é de uma placa retangular, com um furo quadrado central, submetida a uma carga de tração uniaxial na região central (PEREIRA, 2001; SILVA; PEREIRA, 2017). Os parâmetros do modelo e do processo de otimização são expostos na Tabela 10. Devido às características de simetria, o modelo de elementos finitos é construído considerando somente a metade à direita da estrutura.

FIGURA 65 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL: MODELO MECÂNICO.



FONTE: Silva e Pereira (2017).

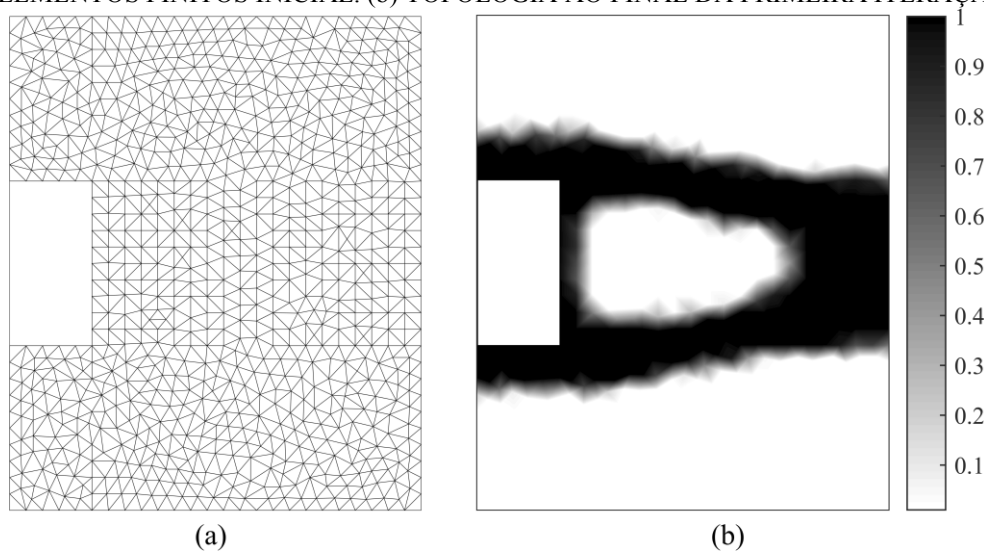
TABELA 11 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL: PARÂMETROS INICIAIS.

Variável	Valor (unidade)	Variável	Valor (unidade)	Variável	Valor (unidade)
λ	0,30	l	1,00 (m)	P	1,00 (N)
E	100,00 (Pa)	ν	0,30	$\bar{\alpha}$	4,00
r_m	0,05 (N.m)	r_ρ	0,0001 (N.m)	FS_{max}	10,00

FONTE: O autor (2017).

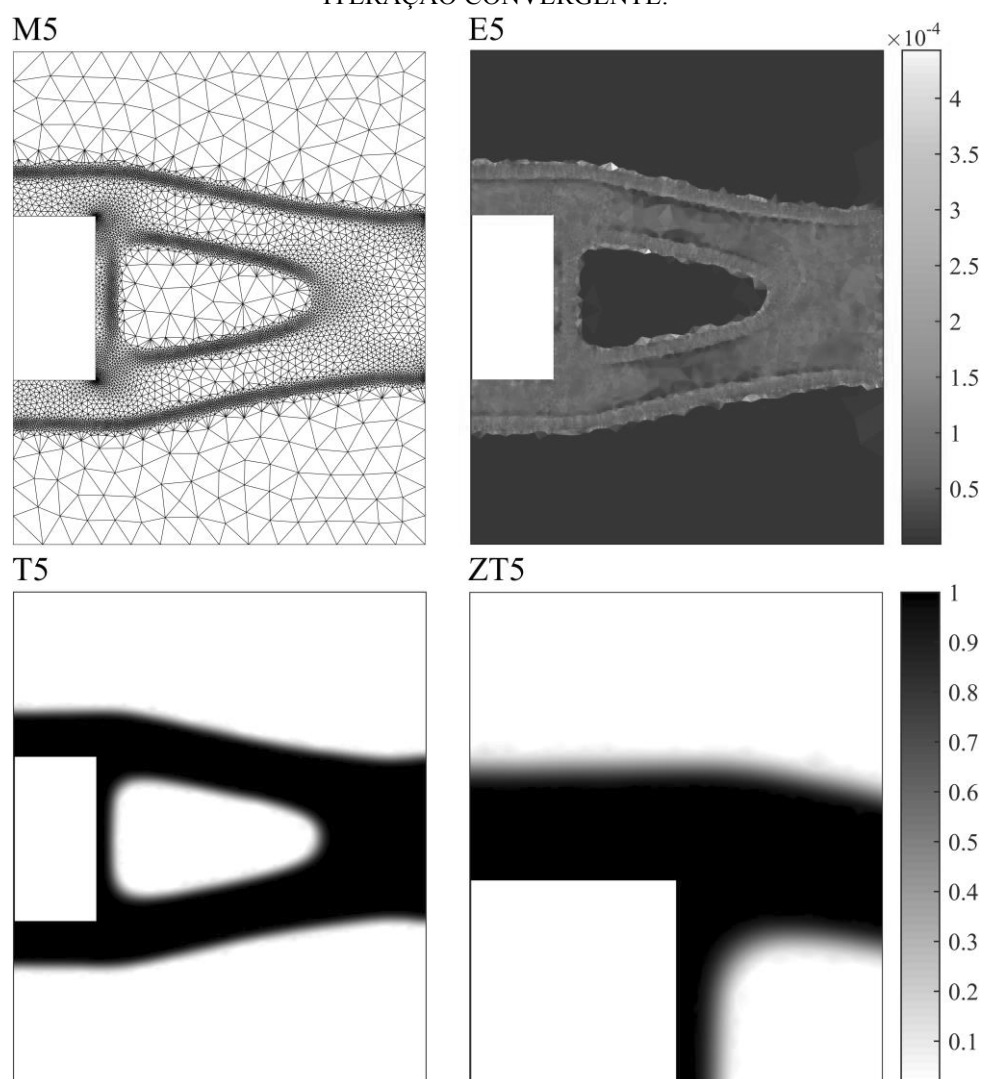
A malha inicial de elementos finitos (FIGURA 66(a)) é formada por 1618 elementos e 870 nós. Esta, resulta em uma topologia (FIGURA 66(b)) com erro relativo em energia igual a 63,61%. Os resultados gráficos para as topologias finais decorrentes das aplicações das técnicas IEDR e AEDR são apresentados, respectivamente, na FIGURA 67 e FIGURA 68.

FIGURA 66 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL: (a) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS INICIAL. (b) TOPOLOGIA AO FINAL DA PRIMEIRA ITERAÇÃO.



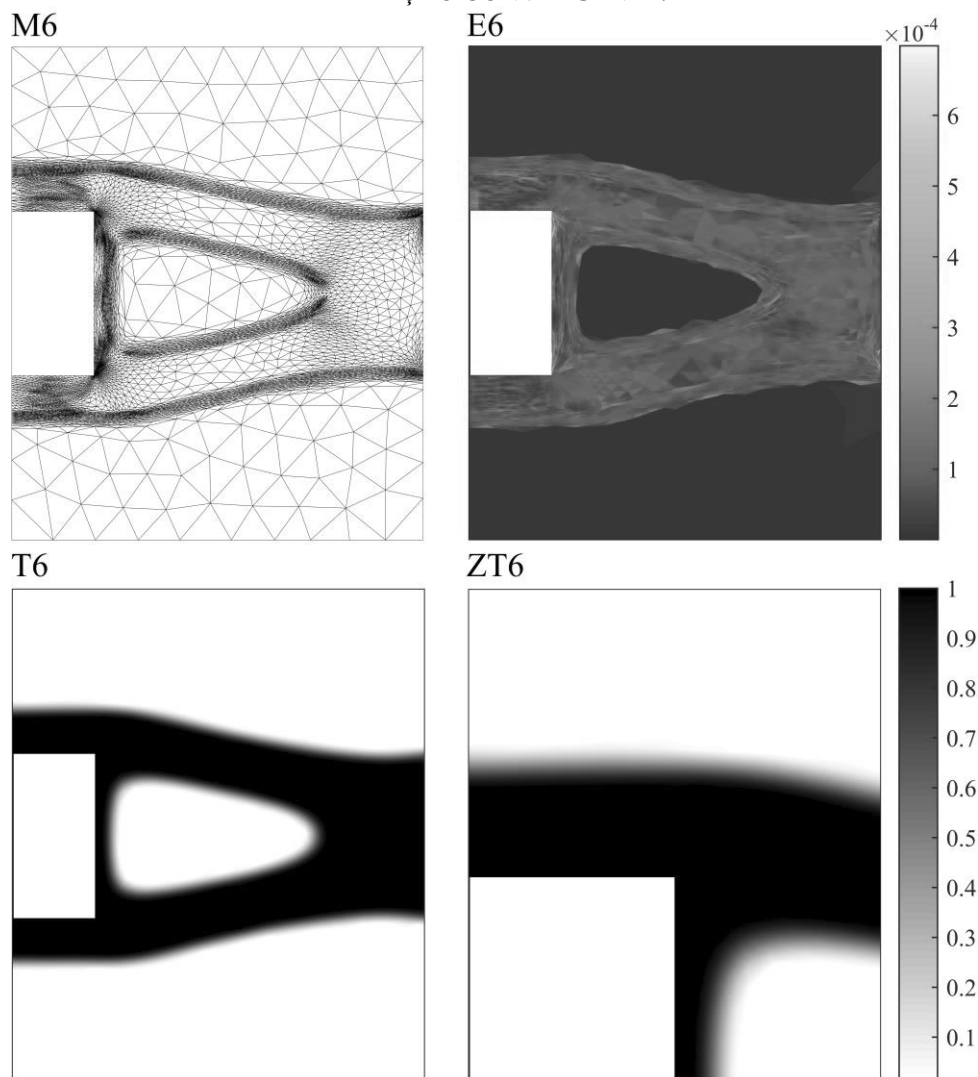
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 67 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL E TÉCNICA IEDR PARA A ITERAÇÃO CONVERGENTE.



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 68 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL E TÉCNICA AEDR PARA A ITERAÇÃO CONVERGENTE.



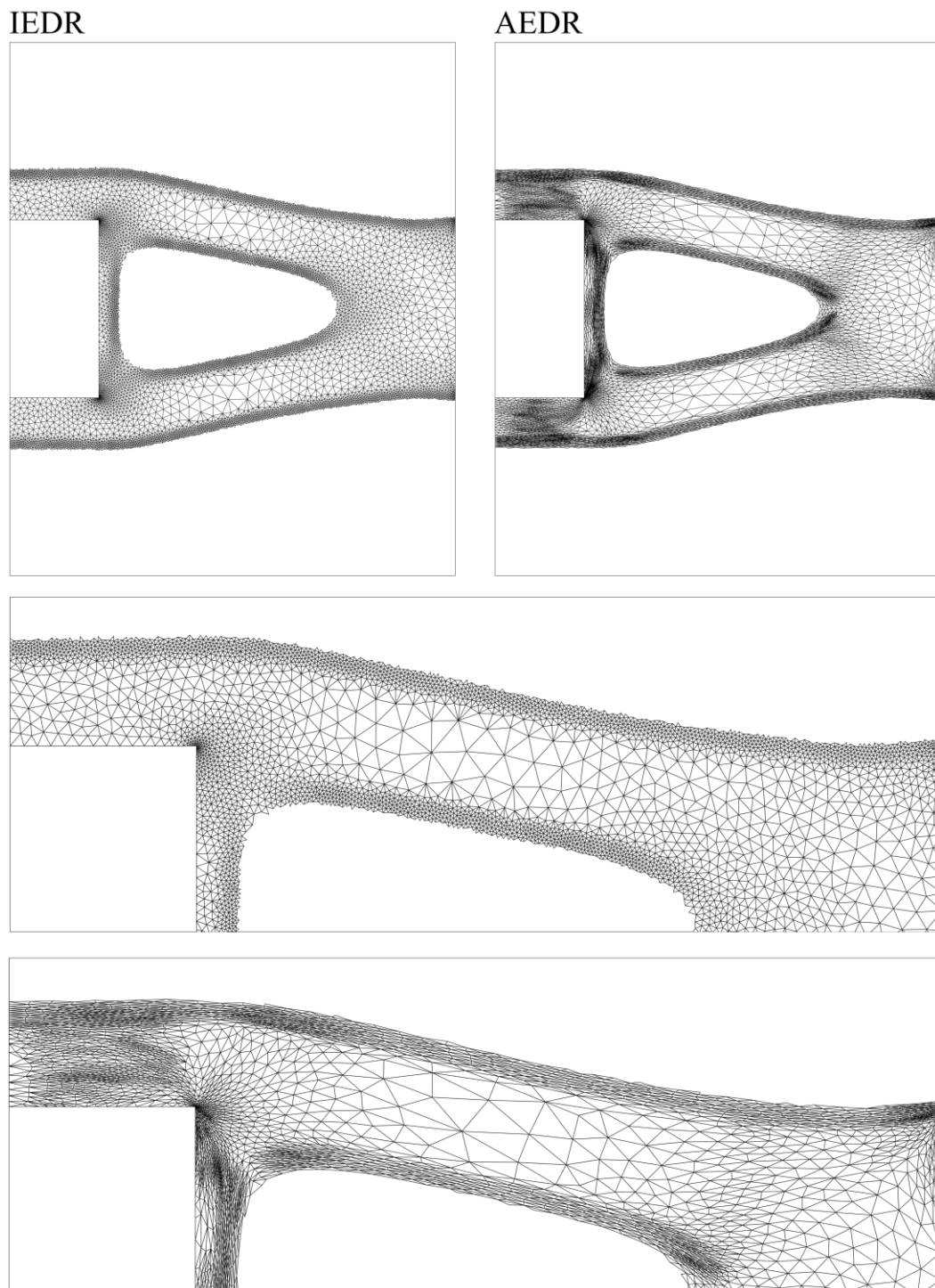
FONTE: O autor (2017).

O processo adaptativo via técnica IEDR conduz, ao longo de 4 iterações adaptativas, a uma malha com 15845 elementos e 8043 nós (FIGURA 67(M5)). A solução topológica final (FIGURA 67(T5 e ZT5)) possui uma boa resolução do contorno material, com erros em energia (FIGURA 67(E5)) aproximadamente equidistribuídos e erro relativo $\eta_\sigma = 4,92\%$ da energia total. O funcional energia estabiliza em 0,0209 N.m, com valor da restrição $h_v = 1e-4$.

Por outro lado, a técnica AEDR conduz a uma malha (FIGURA 68(M6)) composta por 4976 nós, conectados formando 9673 elementos. A topologia resultante (FIGURA 68(T6)) é obtida após 5 iterações adaptativas. Esta, possui uma energia total de 0,0209 N.m, com restrição $h_v = 1e-5$ e erro relativo $\eta_\sigma = 5,02\%$.

Na FIGURA 69 pode-se visualizar, considerando uma representação via densidade de corte e vista ampliada da região $[0,0; 2,5] \times [1,5; 2,4]$, uma comparação das topologias obtidas pelas técnicas IEDR e AEDR. Com isso, percebe-se novamente que a maior suavidade do contorno material é obtida pela técnica AEDR por meio da utilização de elementos distorcidos e orientados de acordo com a interface material-vazio.

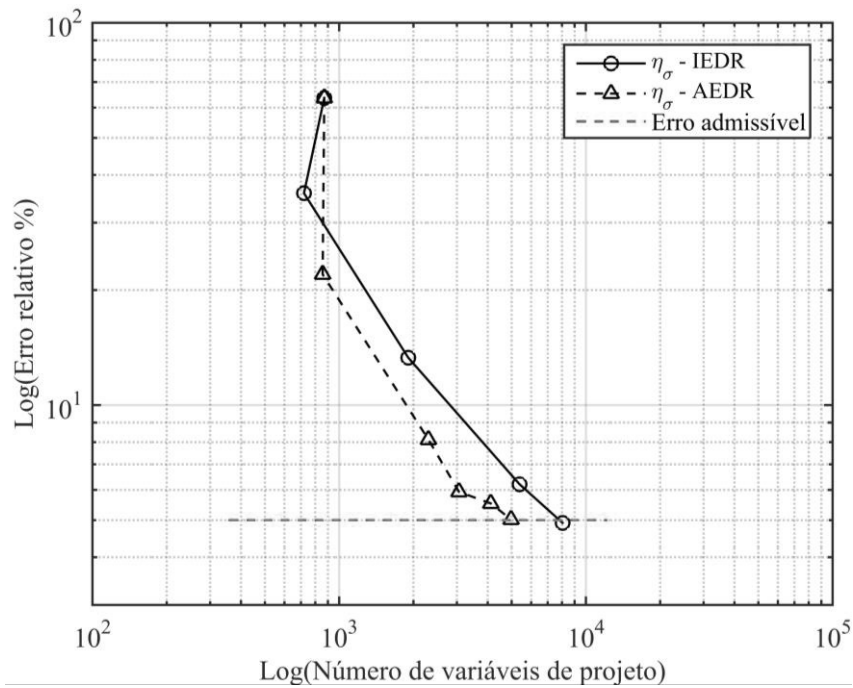
FIGURA 69 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL: ANÁLISE GRÁFICA COMPARATIVA DAS TOPOLOGIAS OBTIDAS CONSIDERANDO AS TÉCNICAS IEDR E AEDR.



FONTE: O autor (2017).

Por fim, na FIGURA 70 são apresentados os históricos de convergência do erro relativo para cada uma das técnicas h-adaptativas em função do número de variáveis de projeto.

FIGURA 70 – PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO CENTRAL: ERRO RELATIVO PERCENTUAL GLOBAL X NÚMERO DE VARIÁVEIS DE PROJETO.



8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta tese tem como principal objetivo desenvolver um novo esquema para obtenção de soluções estruturais bidimensionais. Para tal, é proposta a utilização do MEF juntamente com técnicas h-adaptativas. Em resumo, o esquema descrito ao longo deste trabalho pode ser dividido em quatro principais etapas:

- i. Solução do problema de otimização de topologia estrutural.
- ii. Estimativa dos erros de discretização.
- iii. Determinação das novas dimensões dos elementos.
- iv. Geração da nova malha de elementos finitos.

Com base nestas etapas, o corrente Capítulo apresenta as considerações finais sobre os resultados encontrados e discute algumas possibilidades de trabalhos futuros.

8.1 CONCLUSÕES

Quanto à **solução do problema de otimização de topologia**, esta tese não apresenta avanços no estado da arte. Porém, a escolha da técnica de otimização estrutural empregada caracteriza uma importante etapa para a eficiência do esquema discutido. Neste sentido, a utilização de uma microestrutura SIMP e a inserção à função objetivo dos funcionais de inibição do fenômeno de tabuleiro de xadrez e penalização das densidades intermediárias (PEREIRA, 2001; FANCELLO; PEREIRA, 2003; PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004), representa adequada regularização do problema de mínima flexibilidade com restrição sobre o volume material. Tal fato, pode ser comprovado perante os resultados encontrados no Capítulo 7, onde as soluções topológicas encontradas via Método do Lagrangeano Aumentado possuem, em geral, pequenas regiões de transição material e ausência total do fenômeno de tabuleiro de xadrez. Uma solução com tais características é essencial para a convergência do algoritmo adaptativo, pois as dimensões dos novos elementos são estimadas de acordo com um campo fixo de densidades relativas.

Em relação à **estimativa dos erros de discretização**, esta caracteriza uma etapa inicial do processo h-adaptativo, definindo também valores empregados como critérios de convergência na busca de uma topologia ótima. Esta etapa é realizada mediante a aplicação de um estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987, 1992a, 1992b) posto a partir da norma do erro em energia e aplicado a uma topologia convergente. Desta forma, ao invés de indicadores de refino baseados unicamente na variação

do campo de densidades (STAINKO, 2006b; NGUYEN-XUAN, 2017), o estimador de erro empregado é escrito em termos do erro em energia em função do campo de tensões e da consideração da abrupta variação das propriedades materiais. Os resultados encontrados no Capítulo 7 mostram que os maiores valores de erros em energia elementares, exceto aqueles próximos a singularidades geométricas e pontos de aplicação de cargas, encontram-se ao longo da interface material-vazio.

Dadas as informações locais de erros providas por estimadores, a segunda etapa do MEF h-adaptativo é a **determinação das novas dimensões dos elementos**. Nesta etapa encontram-se as principais contribuições desta tese, as quais estão relacionadas ao desenvolvimento, discussão e validação de novas técnicas de discretização, visando a aplicação em problemas de OETC. Neste contexto, são propostas duas novas técnicas h-adaptativas: IEDR e AEDR. Ambas baseiam-se na construção da função densidade do erro em energia e na solução analítica de um problema de otimização via Método do Lagrangeano.

Inicialmente, as técnicas propostas são desenvolvidas e avaliadas em problemas elípticos de segunda ordem (Poisson e elasticidade plana) com propriedades materiais constantes. A técnica IEDR aplicada a estes problemas, quando comparada com clássicas técnicas de refino encontradas na literatura, em geral, apresenta taxas de convergência iguais ou superiores, satisfazendo os critérios estabelecidos e conduzindo a malhas com erros aproximadamente equidistribuídos. Por outro lado, a técnica AEDR gera, frente a problemas do tipo Poisson com características fortemente anisotrópicas e admitindo uma tolerância idêntica, uma significativa redução (alcançando até vinte vezes) no número de vértices em relação a técnicas isotrópicas. Este resultado deve-se à característica da técnica AEDR em utilizar elementos com altas razões de aspecto e orientados de acordo com as direções principais dos erros.

Após a validação e a discussão das novas técnicas h-adaptativas, estas são estendidas a problemas de OETC, cujo objetivo é a mínima flexibilidade da estrutura e a restrição é sobre o volume material. Em geral, os resultados encontrados mostram que as técnicas funcionam adequadamente, acarretando em uma limitação e na aproximada equidistribuição dos erros em energia e, simultaneamente, conduzindo a uma interface material-vazio com boa resolução.

Em especial, chama-se atenção para o desenvolvimento, discussão e validação da técnica AEDR em problemas de OETC. Até o momento, são encontrados na literatura poucos trabalhos utilizando adaptação anisotrópica de malha em problemas de topologia (JENSEN, 2016a, 2016b, 2017). Portanto, considera-se que esta seja uma aplicação pouco explorada, tornando a técnica AEDR uma importante contribuição ao estado da arte.

Obtida a malha de parâmetros segundo alguma técnica h-adaptativa, a **geração da nova malha** é realizada pelo *software* BAMG, que se mostra eficiente na geração das malhas solicitadas.

8.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesta Seção são expostas algumas sugestões com o objetivo de direcionar avanços futuros relacionados ao presente estudo. Entre estas estão:

- i. *Aplicação do MEF h-adaptativo empregando as técnicas IEDR e AEDR em problemas de otimização estrutural com restrições locais de tensões.*

Embora as técnicas h-adaptativas aqui desenvolvidas sejam discutidas com base no problema de minimização de flexibilidade com uma única restrição sobre o volume material, a aplicação em problemas de OETC avaliando diferentes funções objetivo e restrições é direta. Isso ocorre, pois, uma vez que as técnicas IEDR e AEDR buscam controlar os erros em energia, necessitam como dados de entrada somente de um campo de tensões recuperadas considerando a variação das propriedades materiais resultantes de um processo de otimização. Assim, uma alternativa são os problemas com restrições locais de tensões, onde o adequado controle dos erros de discretização pode evitar avaliações pouco precisas das restrições e auxiliar na correta concepção da estrutura.

- ii. *Desenvolvimento de metodologias de refino considerando as técnicas IEDR e AEDR em problemas de otimização com múltiplos carregamentos e domínios tridimensionais.*

Este tipo de estudo pode aumentar a aplicabilidade do esquema inicialmente proposto nesta tese, abrangendo um maior número de problemas frequentemente investigados e, talvez, justificar a implementação de um esquema análogo em *softwares* comerciais.

- iii. *Avaliação de outras metodologias de otimização estrutural e algoritmos de otimização não-linear.*

O presente estudo utiliza um método de otimização estrutural baseado na microestrutura SIMP. O algoritmo de otimização não-linear possui direção de busca definida pela técnica do gradiente conjugado e passo unidimensional pela técnica da Seção Áurea. Embora este esquema tenha se mostrado eficiente na obtenção de uma topologia que

minimize a flexibilidade da estrutura e satisfaça a restrição sobre o volume material, outras alternativas podem ser exploradas. Por exemplo, pode-se utilizar modelos de materiais laminados do tipo *rank* ou modelos de microcélulas com vazios internos. Ademais, independente da metodologia de otimização empregada, esta deve possuir um adequado controle do fenômeno de tabuleiro de xadrez e mitigar ao máximo a dependência de malha. Tais instabilidades numéricas podem dificultar a convergência do processo h-adaptativo, pois os erros de discretização variam de acordo com as propriedades materiais.

iv. Análise experimental dos resultados obtidos.

Apoiada em uma boa definição da interface material-vazio, torna-se viável a construção de um modelo CAD e posterior fabricação do componente mecânico. Assim, uma análise experimental dos resultados que corrobore com os resultados teóricos, pode reforçar a importância para aplicação industrial do esquema proposto.

v. Expansão das técnicas IEDR e AEDR para elementos de alta ordem polinomial.

Conforme demonstrado aqui, as técnicas IEDR e AEDR são efetivas para alguns problemas elípticos de segunda ordem considerando uma aproximação linear de elementos finitos triangulares. Por outro lado, suas extensões para elementos de ordem superior está em aberto. Uma das principais dificuldades é a obtenção de uma forma quadrática que represente os erros de discretização no interior dos elementos. Esta função, para o elemento linear, é construída diretamente sem perda de informações.

vi. Desenvolvimento das técnicas IEDR e AEDR visando a aplicação em outros fenômenos físicos.

Considerando a eficiência das técnicas IEDR e AEDR no controle e equidistribuição dos erros em problemas elípticos de segunda ordem, uma interessante vertente de estudo é o desenvolvimento destas técnicas para outras classes de problemas. Como exemplos, têm-se os problemas de dinâmica dos fluidos computacional, os quais já possuem trabalhos apontando vantagens na utilização de malhas anisotrópicas.

vii. Avaliação de diferentes critérios de malhas ótimas.

Uma das possibilidades de trabalhos futuros é explorar a utilização das técnicas IEDR e AEDR à luz de diferentes critérios de malha ótima. Por exemplo, ao invés da

utilização do critério de equidistribuição do erro, pode-se adotar o clássico critério de equidistribuição da densidade do erro (OÑATE; BUGEDA, 1993).

viii. Avaliação de diferentes processos de recuperação de gradientes.

Como as técnicas IEDR e AEDR dependem essencialmente da qualidade dos valores nodais de gradientes recuperados, embora os métodos de recuperação aqui empregados tenham se mostrado numericamente satisfatórios, uma avaliação minuciosa de outros métodos considerando malhas não-estruturadas isotrópicas ou anisotrópicas é importante e recomendado.

ix. Análise comparativa de diferentes geradores de malha.

Uma vez que o processo de geração de malha abrange uma área muito específica da ciência, em geral, pesquisadores da área de adaptatividade de malha simplesmente utilizam um *software* comercial ou acadêmico para tal tarefa. Assim, embora o gerador BAMG, aqui empregado, tenha se mostrado bastante eficiente, uma análise comparativa de diferentes processos de geração torna-se interessante.

x. Aplicação de outros métodos numéricos de solução em problemas de OETC considerando adaptações de malha conduzidas pelas técnicas IEDR e AEDR.

Embora as técnicas h-adaptativas IEDR e AEDR ligadas ao MEF tenham se mostrado satisfatórias no âmbito de problemas de OETC, a extensão dessas técnicas de refino considerando outros métodos numéricos, por exemplo, o Método Estendido dos Elementos Finitos, pode acarretar em diminuições significativas dos erros de discretização através do enriquecimento dos subespaços de aproximação.

REFERÊNCIAS

AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. **A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis**. 1. ed. John Wiley and Sons, 2000.

AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods. **Numerische Mathematik**, v. 65, p. 23–50, 1993a.

AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. A posteriori error estimators for second order elliptic systems: Part 1. Theoretical foundations and a posteriori error analysis. **Computers and mathematics with applications**, v. 25, p. 101–113, 1993b.

AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. A posteriori error estimators for second order elliptic systems: Part 2. An Optimal Order Process for Calculating Self-Equilibrating Fluxes. **Computers and mathematics with applications**, v. 26, p. 75–87, 1993c.

AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. A posteriori error estimation in finite element analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 142, p. 1–88, 1997.

AKIN, J. E. **Finite Element Analysis with Error Estimators: An Introduction to the FEM and Adaptive Error Analysis for Engineering Students**. 1. ed. Oxford: Elsevier: Butterworth Heinemann, 2005.

ALLAIRE, G.; FRANCFORT, G. A. A numerical algorithm for topology and shape optimization. Disponível em: BENDSØE, M. P.; SOARES MOTA, C. A. (editores). **Topology design of structures**. Kluwer, Boston, p. 239–248, 1993.

ALLAIRE, G.; KOHN, R. V. Topology optimization and optimal shape design using homogenization. Disponível em: BENDSØE, M. P.; SOARES MOTA, C. A. (editores). **Topology design of structures**. Kluwer, Boston, p. 207–218, 1993.

ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; MAILLOT, H. Topology optimization for minimum stress design with the homogenization method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 28, p. 87–98, 2004.

AMBROSIO, L.; BUTTAZZO, G. An optimal design problem with perimeter penalization. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 1, p. 55–69, 1993.

AMSTUTZ, S. Connections between topological sensitivity analysis and material interpolation schemes in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 43, p. 755–765, 2011.

AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A. Topological optimization of structures subject to von Mises stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, p. 407–420, 2010.

AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A.; NETO, E. A. S. Topological derivative-based topology optimization of structures subject to Drucker-Prager stress constraints. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 233 – 236, p. 123–136, 2012.

ANTON, H.; RORRES, C. **Elementary Linear Algebra: Applications Version**. 10. ed. John Wiley and Sons, 2010.

ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design**. 4. ed. Elsevier, 2017.

ASKES, H.; RODRÍGUES-FERRAN, A. A combined rh -adaptive scheme based on domain subdivision. Formulation and linear examples. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 51, p. 253–273, 2001.

ASKES, H.; SLUYS, L. J. Remeshing strategies for adaptive ALE analysis of strain localization. **European Journal of Mechanics – A/Solids**, v. 19, p. 447–467, 2000.

BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. A Posteriori Error Analysis of Finite Element Solutions for One-Dimensional Problems. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 18, p. 565–589, 1981.

BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. A posteriori error estimates for the finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 12, p. 1597–1615, 1978a.

BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 15, p. 736–754, 1978b.

BABUSKA, I.; STROUBOULIS, T.; COPPS, K. hp Optimization of finite element approximations: analysis of the optimal mesh sequences in one dimension. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 150, p. 89–108, 1997.

BABUSKA, I.; STROUBOULIS, T.; MATHUR, A; UPADHYAY, C. S. Pollution-error in the h-version of the finite-element method and the local quality of a-posteriori error estimators. **Finite Element in Analysis and Design**, v. 17, p. 273–321, 1994.

BAGGE, M. A model of bone adaptation as an optimization process. **Journal of Biomechanics**, v. 33, p. 1349–1357, 2000.

BENDSØE, M. P. **Optimization of Structural Topology, Shape and Material**. Springer, 1995.

BENDSØE, M. P. **Variable Topology Optimization: Status and Challenge**. European Conference on Computational Mechanics, n. 137, 1999.

BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, v. 1, p. 193–202, 1989.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, p. 197–224, 1988.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics**, v. 69, p. 635–654, 1999.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Method and Application**. Berlin: Springer, 2003.

BENEDETTI, A.; de MIRANDA, S.; UBERTINI, F. A posteriori error estimation based on the super convergent recovery by compatibility in patches. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 67, p. 108–131, 2006.

BERTSEKAS, D. P. **Nonlinear Programming**. 2. ed. Athena Scientific, 1999.

BORGES, L.; FEIJÓO, R.; PADRA, C.; ZOUAIN, N. A directional error estimator for adaptive finite element analysis. **Computational Mechanics**, CIMNE, Barcelona, Spain, 1998.

BOROOMAND, B.; ZIENKIEWICZ, O. C. Recovery by equilibrium patches. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p. 137–154, 1997a.

BOROOMAND, B.; ZIENKIEWICZ, O. C. An improved REP recovery and the effectivity robustness test. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p. 3247–3277, 1997b.

BOROUCHAKI, H.; GEORGE, P. L.; HECHT, F.; LAUG, P.; SALTEL, E. Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part I. Algorithms. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 25, p. 61–83, 1997.

BOROUCHAKI, H.; GEORGE, P. L.; MOHAMMADI, B. Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part II. Applications. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 25, p. 85–109, 1997.

BORRVALL, T.; PETERSSON, J. Topology optimization using regularized intermediate density control. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 4911–4928, 2001.

BRUGGI, M. On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 36, p. 125–141, 2008.

BRUGGI, M.; DUYSINX, P. Topology optimization for minimum weight with compliance and stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 46, p. 369–384, 2012.

BRUGGI, M.; TALIERCIO, A. Topology optimization of the fiber-reinforcement retrofitting existing structures. **International Journal of Solids and Structures**, v. 50, p. 121–136, 2013.

BRUGGI, M.; VERANI, M. A fully adaptive topology optimization algorithm with goal-oriented error control. **Computers and Structures**, v. 89, p. 1481–1493, 2011.

BUGEDA, G. **Utilización de Técnicas de Estimación de Error y Generación Automática de Malhas em Processos de Optimización Estructural**. Tese (Doutorado) – Universitat Polytécnica de Catalunya, 1990.

BURMAN, E.; CLAUS, S.; HANSBO, P.; LARSON, M. G.; MASSING, A. CutFEM: Discretizing geometry and partial differential equations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 104, p. 472–501, 2015.

BURMAN, E.; ELFVERSON, D.; HANSBO, P.; LARSON, M. G.; LARSSON, K. Shape optimization using the cut finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 328, p. 242–261, 2018.

BURMAN, E.; HANSBO, P. Fictitious domain finite element methods using cut elements: II. A stabilized Nitsche method. **Applied Numerical Mathematics**, v. 62, p. 328–341, 2012.

BUSCAGLIA, G. C.; DARI, E. A. Anisotropic mesh optimization and its application in adaptivity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p. 4119–4136, 1997.

CASTELLAZZI, G.; de MIRANDA, S.; UBERTINI, F. Adaptivity based on the recovery by compatibility in patches. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 46, p. 379–390, 2010.

CASTRO-DÍAZ, M. J.; HECTH, F.; MOHAMMADI, B.; PIRONNEAU, O. Anisotropic unstructured mesh adaption for flow simulations. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 25, p. 475–491, 1997.

CAO, W. An interpolation error estimate on anisotropic meshes in R^n and optimal metrics for mesh refinement. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 45, p. 2368–2391, 2007.

CAO, W. Superconvergence analysis of the linear finite element method and a gradient recovery postprocessing on anisotropic meshes. **Mathematics of Computation**, v. 84, p. 89–117, 2015.

CAO, W. On the superconvergence patch recovery techniques for the linear finite element approximation on anisotropic meshes. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 265, p. 33–51, 2014.

CHALLIS, J. V. A discrete level-set topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, p. 453–464, 2010.

CHEN, L.; SUN, P.; XU, J. Optimal anisotropic meshes for minimizing interpolation errors in L_p -norm. **Mathematics of Computation**, v. 76, p. 179–204, 2007.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. USA: 1. ed. John Wiley and Sons, 2002.

COSTA, C. G. **Estimadores a Posteriori Baseados nas Derivadas de Segunda Ordem**. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1999.

COSTA JÚNIOR, J. C. A. **Otimização Topológica com Refinos h-adaptativos**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

COSTA JÚNIOR, J. C. A.; ALVES, M. K. Layout optimization with h-adaptivity of structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 58, p. 83–102, 2003.

CUILLIÈRE, J. C.; FRANÇOIS, V. Towards quantitative mesh pre-optimization for finite element analysis. **Computer-Aided Design and Applications**, v. 14, p. 392–407, 2017.

CUILLIÈRE, J. C.; FRANÇOIS, V.; LACROIX, R. A new approach to automatic and a priori mesh adaptation around circular holes for finite element analysis. **Computer-Aided Design**, v. 77, p. 18–45, 2016.

DEATON, J. D.; GRANDHI, R. V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2013.

DÍEZ, P.; HUERTA, A. A unified approach to remeshing strategies for finite element h-adaptivity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 176, p. 215–229, 1999.

DÍEZ, P.; RÓDENAS, J. J.; ZIENKIEWICZ, O. C. Equilibrated patch recovery error estimates: simple and accurate upper bounds of the error. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 69, p. 2075–2098, 2007.

DIJK, N. P.; MAUTE, K.; LANGELAAR, M.; KEULEN, F. Level-set methods for structural topology optimization: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, p. 437–472, 2013.

DOMPIERRE J.; MOKWINSKI, Y.; VALLET, M. G.; GUILBAULT, F. On ellipse intersection and union with application to anisotropic mesh adaptation. **Engineering with Computers**, v. 33, p. 754–766, 2017.

DUAN, X. B.; LI, F. F.; QIN, X. Q. Adaptive mesh method for topology optimization of fluid flow. **Applied Mathematics Letters**, v. 44, p. 40–44, 2015.

DUARTE, H. **Estimador de Erro para a Formulação p do Método de Elementos Finitos Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura**. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, 2003.

DUYSINX, P.; BENDSØE, M. P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 43, p. 1453–1478, 1998.

EMMENDOERFER JR., H. **Problema de Otimização Estrutural com Restrição de Tensão Local Usando o Método Level Set**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

EMMENDOERFER JR., H.; FANCELLO, E. A. A level set approach for topology optimization with local stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 99, p. 129–156, 2014.

EMMENDOERFER JR., H.; FANCELLO, E. A. Topological optimization with local stress constraint based on level set evolution via reaction-diffusion. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 305, p. 62–88, 2016.

FANCELLO, E. A.; GUIMARÃES, A. C.; FEIJÓO, R. Aranha – Gerador de malhas 2d para elementos finitos triangulares de 3 e 6 nós. In: **Anais do XI Congresso Ibero-Latino-Americano em Métodos Numéricos em Engenharia**, v. 2, p. 983–996, Brasil, 1990.

FANCELLO, E. A.; PEREIRA, J. T. Structural topology optimization considering material failure constraints and multiple load conditions. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 1, p. 3–24, 2003.

FARRELL, P. E.; MICHELETTI, S.; PEROTTO, S. An anisotropic Zienkiewicz-Zhu-type error estimator for 3D applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 85, pp. 671–692, 2011.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. 1. ed., John Wiley & Sons, 2007.

FORMAGGIA, L.; PEROTTO, S. New anisotropic a priori error estimates. **Numerische Mathematik**, v. 89, pp. 641–667, 2001.

FORMAGGIA, L.; PEROTTO, S. Anisotropic error estimates for elliptic problems. **Numerische Mathematik**, v. 94, pp. 67–92, 2003.

FRANÇOIS, V.; CUILLIÈRE, J. C. Automatic mesh pre-optimization based on geometric discretization error. **Advances in Engineering Software**, v. 31, p. 763–774, 2000.

GEA, H. C. Topology optimization: a new Microstructure-based design domain method. **Computers and Structures**, v. 61, p. 781–788, 1996.

GEORGE, P. L.; BOROUCHAKI, H. **Delaunay Triangulation and Meshing: Application to Finite Elements**. 1. ed. Hermes, Paris, 1998.

GONÇALVES, J. C. L. **Otimização Estrutural Topológica com Refino de Malha Adaptativo Isotrópico**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

GRÄTSCH, T.; BATHE, J. K. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. **Computers and Structures**, v. 83, p. 235–265, 2005.

GUEST, J. K.; GENUT, L. C. S. Reducing dimensionality in topology optimization using adaptive design variable fields. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 81, p. 1019–1045, 2010.

HABER, R. B.; JOG, C. S.; BENDSØE, M. P. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. **Structural Optimization**, v. 11, p. 1–12, 1996.

HAGMEIJER, R. Grid adaptation based on modified anisotropic diffusion equations formulated in the parametric domain. **Journal of Computational Physics**, v. 115, p. 169–183, 1994.

HANSBO, P.; LARSON, M. G.; LARSSON, K. Cut Finite Element Methods for linear elasticity problems. **ArXiv e-prints**, 2017.

HASSANI, B.; HINTON, E. **Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory, Practice and Software**. Springer, 1999.

HASSANI, B.; HINTON, E. A review of homogenization and topology optimization I – homogenization theory for media with periodic structure. **Computers and Structures**, v. 69, p. 707–717, 1998a.

HASSANI, B.; HINTON, E. A review of homogenization and topology optimization II – analytical and numerical solution of homogenization equations. **Computers and Structures**, v. 69, p. 719–738, 1998b.

HASSANI, B.; HINTON, E. A review of homogenization and topology optimization III – topology optimization using optimality criteria. **Computers and Structures**, v. 69, p. 739–756, 1998c.

HECHT, F. BAMG: Bidimensional Anisotropic Mesh Generator. Relatório Interno, INRIA, 1998. Disponível em <http://www.freefem.org/>.

HECHT, F. BAMG: Bidimensional Anisotropic Mesh Generator, Relatório Interno, draft version v1.00, 2006.

HETCH, F. New development in Freefem++. **Journal of Numerical Mathematics**, v. 20, p. 251–265, 2012.

HETMANIUK, U.; KNUPP, P. A mesh optimization algorithm to decrease the maximum interpolation error of linear triangular finite elements. **Engineering with Computers**, v. 27, pp. 3–15, 2011.

HUANG, W. Metric tensors for anisotropic mesh generation. **Journal of Computational Physics**, v. 204, p. 633–665, 2005.

HUANG, W. Mathematical Principles of Anisotropic Mesh Adaptation. **Communications in Computational Physics**, v. 1, p. 276–310, 2006.

HUANG, W.; LI, X. An anisotropic mesh adaptation method for the finite element solution of variational problems. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 46, p. 61–73, 2010.

HUANG, W.; KAMENSKI, L.; LANG, J. A new anisotropic mesh adaptation method based upon hierarchical a posteriori error estimates. **Journal of Computational Physics**, v. 229, pp. 2179–2198, 2010.

HUANG, X.; XIE, Y. M. **Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures - Methods and Applications**. 1. ed. Wiley, 2010a.

HUANG, Y.; YI, N. The Superconvergent Cluster Recovery Method. **Journal of Scientific Computing**, v. 44, p. 301–322, 2010.

HUERTA, A.; RODRÍGUEZ-FERRAN, A.; DÍEZ, P.; SARRATE, J. Adaptive Finite Element strategies based on error assessment. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, p. 1803–1818, 1999.

JACOBS, C. R. **Numerical Simulation of Bone Adaptation to Mechanical Loading**. PhD Thesis. Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Palo Alto, 1994.

JACOBS, C. R.; SIMO, J. C.; BEAUPRÉ, G. S.; CARTER, R. D. Adaptive bone remodeling incorporating simultaneous density and anisotropy considerations. **Journal of Biomechanics**, v. 30, p. 603–613, 1997.

JAMES, K. A.; HANSEN, J. S.; MARTINS, J. R. R. A. Structural topology optimization for multiple load cases using a dynamic aggregation technique. **Engineering Optimization**, v. 41, p. 1103–1118, 2009.

JENSEN; K. E. Solving stress and compliance constrained volume minimization using anisotropic mesh adaptation, the method of moving asymptotes and a global p-norm. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 54, p. 831–841, 2016a.

JENSEN; K. E. Anisotropic mesh adaptation and topology optimization in three dimensions. **Journal of Mechanical Design**, v. 138, p. 061401, 2016b.

JENSEN; K. E. A Matlab script for solving 2D/3D minimum compliance problems using anisotropic mesh adaptation. **Procedia Engineering**, v. 203, p. 102–114, 2017.

JOHNSON, C.; HANSBO, P. Adaptive finite element methods in computational mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 101, p. 143–181, 1992.

KANG, Z.; WANG, Y. Structural topology optimization based on non-local Shepard interpolation of density field. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, p. 3515–3525, 2011.

KHENNANE, A. **Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB and Abaqus**. Boca Raton: 1. ed. CRC Press: Taylor e Francis Group, 2013.

KUNERT, G. A Posteriori Error Estimation for Anisotropic Tetrahedral and Triangular Finite Element Meshes. **Dissertação de mestrado**, TU Chemnitz, 1999.

KUNERT, G.; NICAISE, S. Zienkiewicz-Zhu error estimators on anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes. **ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, v. 37, pp. 1013–1043, 2003.

LAUG, P.; BOUROCHAKI, H. BL2D-V2, Maillur Bidimensionnel Adaptatif. Relatório Interno RT-0275, INRIA. 2003.

LAMBE, A. B.; CZEKANSKI, A. Topology optimization using continuous density field and adaptive mesh refinement. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2017 (aceito para publicação).

LAUG, P.; BOUROCHAKI, H. Metric tensor recovery for adaptive meshing. **Mathematics and Computers in Simulation**, 2015.

LAUG, P.; BOUROCHAKI, H. The BL2D Mesh Generator: Beginner's Guide, User's and Programmer's Manual, Technical Report RT-0194, Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (INRIA), Rocquencourt, France, 1996.

LE, C.; NORATO, J.; BRUNS, T.; HA, C.; TORTORELLI, D. Stress-based topology optimization for continua. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, p. 605–620, 2010.

LEMAIRE, V.; TOBIN, F. L.; GRELLER, L. D.; CHO, C. R.; SUVA, L. J. Modeling the interactions between osteoblast and osteoclast activities in bone remodeling. **Journal of Theoretical Biology**, v. 229, p. 293–309, 2004.

LI, L.; WANG, M. Y.; WEI, P. XFEM schemes for level set based structural optimization. **Frontiers of Mechanical Engineering**, v. 7, p. 335–356, 2012.

LI, L.-Y.; BETTESS, P. Notes on mesh optimal criteria in adaptive finite element computations. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 11, p. 911–915, 1995.

LI, L.-Y.; BETTESS, P.; BULL, J. W.; BOND, T.; APPLGARTH, I. Theoretical formulations for adaptive finite element computations. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 11, p. 857–868, 1995.

LINS, R. M. **Estimador de Erro a Posteriori Baseado em Recuperação do Gradiente para o Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo, 2011.

LOPES, C. G.; SANTOS, R. B.; NOVOTNY, A. A. Topological derivative-based topology optimization of structures subject to multiple load-cases. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 12, p. 834–860, 2015.

LUENBERGER, D. G. **Optimization by Vector Space Methods**. New York. John Wiley & Sons, 1969.

LUO, Y. *r*-Adaptation algorithm guided by gradients of strain energy density. **International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering**, v. 26, p. 1077–1086, 2010.

LUO, Y.; WANG, M. Y.; KANG, Z. An enhanced aggregation method for topology optimization with local stress constraints. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 254, p. 31–41, 2013.

- MAHDAVI, A.; BALAGI, R.; FRECKER, M.; MOCKENSTURM, E. M. Topology optimization of 2D continua for minimum compliance using parallel computing. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 32, p. 121–132, 2006.
- MARTÍNEZ, J. M. A note on the theoretical convergence properties of the SIMP method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 29, p. 319–323, 2005.
- MAUTE, K.; RAMM, E. Adaptive topology optimization. **Structural Optimization**, v. 10, p. 100–112, 1995.
- MAUTE, K.; SCHWARZ, S.; RAMM, E. Adaptive topology optimization of elastoplastic structures. **Structural Optimization**, v. 15, p. 81–91, 1998.
- McNAMARA, M. L.; PRENDERGAST, P. J. Bone remodeling algorithms incorporating both strain and microdamage stimuli. **Journal of Biomechanics**, v. 40, p. 1381–1391, 2007.
- MICHELL, A. G. M. The limits of economy of material in frame-structures. **Philosophical Magazine**, v. 8, p. 589–597, 1904.
- MICHELETTI, S.; PEROTTO, S. Reliability and efficiency of an anisotropic Zienkiewicz-Zhu error estimator. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, pp. 799–835, 2006.
- MICHELETTI, S.; PEROTTO, S.; PICASSO, M. Stabilized Finite Elements on Anisotropic Meshes: A priori error estimates for the advection-diffusion and the Stokes problems. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 41, pp. 1131–1162, 2003.
- MICHELETTI, S.; PEROTTO, S.; FARRELL, P. E. A recovery-based error estimator for anisotropic mesh adaptation in CFD. **Boletín SEMA**, v. 50, pp. 115–138, 2010.
- MUÑOZ, E.; STOLPE, M. Generalized Benders' Decomposition for topology optimization problems. **Journal of Global Optimization**, v. 51, p. 149–183, 2011.
- NADAL, E.; DÍEZ, P.; RÓDENAS, J. J.; FUENMAYOR, F. J. A recovery-explicit error estimator in energy norm for linear elasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 287, p. 172–190, 2015.
- NANA, A.; CULLIÈRE, J. C.; FRANÇOIS, V. Towards adaptive topology optimization. **Advances in Engineering Software**, v. 100, p. 290–307, 2016.
- NGUYEN, T. H.; PAULINO, G. H.; SONG, J.; LE, C. H. A computational paradigm for multiresolution topology optimization (MTOP). **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, p. 525–539, 2010.
- NGUYEN, T. H.; PAULINO, G. H.; SONG, J.; LE, C. H. Improving multiresolution topology optimization via multiple discretizations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 92, p. 507–530, 2012.

NGUYEN-XUAN, H. A poly-tree-based adaptive polygonal finite element method for topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 110, p. 972–1000, 2017.

NOVOTNY, A. A. **Adaptatividade h na Otimização Topológica e Projeto Ótimo de Malhas hp Adaptativas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1998.

NOVOTNY, A. A.; FANCELLO, E. A. Um refinamento h , p e hp adaptativo na análise de flexão de placas semi-espessas. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 14, p. 25–48, 1998.

NOVOTNY, A. A.; PEREIRA, J. T.; FANCELLO, E. A.; BARCELLOS, C. S. A fast hp adaptive finite element mesh design. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 133–148, 2000.

NOVOTNY, A. A.; FEIJÓO, R. A.; TAROCO, E.; PADRA, C. Topological sensitivity analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, p. 803–829, 2003.

NOVOTNY, A. A.; FEIJÓO, R. A.; TAROCO, E.; PADRA, C. Topological sensitivity analysis for three-dimensional linear elasticity problem. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 4354–4364, 2007.

NOVOTNY, A. A.; SOKOLOWSKI, J. **Topological Derivatives in Shape Optimization**. Springer, 2013.

NOWAK, M. Structural optimization system based on trabecular bone surface adaptation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 32, p. 241–249, 2006.

ODEN, J. T.; REDDY, J. N. **An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements**. John Wiley and Sons, New York, EUA, 1976.

ODEN, J. T.; REDDY, J. N. **An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements**. New York: Dover, 2011.

OH, H.; BATRA, R. C. Application of Zienkiewicz—Zhu’s error estimate with superconvergent patch recovery to hierarchical p -refinement. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 31, p. 273–280, 1999.

OHSAKI, M. **Optimization of Finite Dimensional Structures**. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011.

OÑATE, E.; BUGEDA, G. A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis. **Engineering Computations**, v. 10, p. 307–321, 1993.

PAIN, C. C.; UMPLEBY, A. P.; OLIVEIRA, C. R. E.; GODDARD, A. J. H. Tetrahedral mesh optimisation and adaptivity for steady-state and transient finite element calculations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 3771–3796, 2001.

PARK, K.; YOUN, S. Topology optimization of shell structures using adaptive inner-front (AIF) level set method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 36, p. 43–58, 2008.

PAYTEN, W. M.; BEN-NISSAN, B.; MERCER, D. J. Optimal Topology Design using a global self-organisational approach. **International Journal of Solids and Structures**, v. 35, p. 219–237, 1998.

PEREIRA, J. T. **Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrições sobre o Critério de Falha Material**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

PEREIRA, J. T.; FANCELLO, E. A.; BARCELLOS, C. S. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 26, p. 50–66, 2004.

PEREIRA, J. T.; SILVA, J. Anisotropic h-adaptive Finite Element Method based on error density recovery. **Engineering With Computers**, *submetido*, 2017.

PEREIRA, J. T.; SILVA, J.; GONÇALVES, J. C. L. Método dos Elementos Finitos h-adaptativo: Uma nova técnica para projeção isotrópica do tamanho elementar. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia**, v. 2, p. 18–37, 2016.

PETERSSON, J.; SIGMUND, O. Slope constrained topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 41, p. 1417–1434, 1998.

PICASSO, M. Adaptive finite elements with large aspect ratio based on an anisotropic error estimator involving first order derivatives. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 196, pp. 14–23, 2006.

PICASSO, M. An anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator: Application to elliptic and parabolic problems. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 24, pp. 1328–1355, 2003b.

PICASSO, M. Numerical study of the effectivity index for an anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 19, pp. 13–23, 2003a.

PICASSO, M.; ALAUZET, F.; BOROUCHAKI, H.; GEORGE, P. A numerical study of some hessian recovery techniques on isotropic and anisotropic meshes. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 33, pp. 1058–1076, 2011.

PORTA, G. M.; PEROTTO, S.; BALLIO, F. Anisotropic mesh adaptation driven by a recovery-based error estimator for shallow water flow modeling. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 70, pp. 269–299, 2012.

RAJAGOPAL, A.; SIVAKUMAR, S. M. A combined r-h adaptive strategy based on material forces and error assessment for plane problems and biomaterial interfaces. **Computational Mechanics**, v. 41, p. 49–72, 2007.

RAMM, E.; MAUTE, K.; SCHWARZ, S. Adaptive topology and shape optimization. **Computational Mechanics – New Trends and Applications**, Barcelona, Espanha, 1998.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3. ed. Mc Graw Hill, 2006.

RIETZ, A. Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, p. 159–163, 2001.

RÓDENAS, J. J.; TUR, M.; FUENMAYOR, F. J.; VERCHER, A. Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: The SPR-C technique. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 70, p. 705–727, 2007.

ROZVANY, G. I. N. A critical review of established methods of structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 37, p. 217–237, 2009.

ROZVANY, G. I. N. **Topology Optimization Structural Mechanics**. New York: Springer, 1997.

SHARMA, A.; MAUTE, K. Stress-based topology optimization using spatial gradient stabilized XFEM. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, pp. 1–22, 2017.

SIEBERT, K. G. An a posteriori error estimator for anisotropic refinement. **Numerische Mathematik**, v. 73, pp. 373–398, 1996.

SIENZ, J.; HINTON, E. Reliable structural optimization with error estimation, adaptivity and robust sensitivity analysis. **Computers and Structures**, v. 64, pp. 31–63, 1997.

SIGMUND, O.; MAUTE, K. Topology optimization approaches. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, pp. 1031–1055, 2013.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, v. 16, pp. 68–75, 1998.

SILVA, J. **Análise de Estimadores de Erro a Posteriori Aplicados ao Método dos Elementos Finitos Utilizando Refino h-adaptativo**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

SILVA, J.; PEREIRA, J. T. h-adaptive Topology Optimization considering abrupt variations of material properties. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, *submetido*, 2017.

SILVA, P. S. R. **Estruturas Termoelásticas sob Otimização Topológica e h-adaptatividade**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2007.

SOKOLOWSKI, J.; ZOCHOWSKI, A. On the topological derivative in shape optimization. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 37, p. 1251–1272, 1999.

STAINKO, R. **Advanced Multilevel Techniques to Topology Optimization**. Dissertation (Mestrado) – Johannes Kepler Universitat, Linz, 2006a.

STAINKO, R. An adaptive multilevel approach to the minimal compliance problem in topology optimization. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 22, p. 109–118, 2006b.

STEWART, J.R.; HUGHES, T.J.R. A tutorial in elementary finite element error analysis: A systematic presentation of a priori and a posteriori error estimates. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 158, p. 1–22, 1998.

STEWART, J. R.; HUGHES, T. J. R. An a posteriori error estimator and hp-adaptive strategy for finite element discretizations of the Helmholtz equation in exterior domains. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 25, p. 1–26, 1997.

STOLPE, M. **On Models and Methods for Global Optimization of Structural Topology**. Thesis (Doctoral) – Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm, 2003.

STOLPE, M.; SVANBERG, K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 22, p. 116–124, 2001.

STURLER, de E.; PAULINO, G. H.; WANG, S. Topology optimization with adaptive mesh refinement. **Proceedings of the 6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures**, Ithaca, New York, 2008.

TOVAR, A.; KHANDELWAL, K. Topology optimization for minimum compliance using a control strategy. **Engineering Structures**, v. 48, p. 674–682, 2013.

UBERTINI, F. Patch recovery based on complementary energy. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, p. 1501–1538, 2004.

VASILIEV, V. V.; GÜRDAL, Z. **Optimal Design: Theory and Applications to Materials and Structures**. Lancaster. Technomic Publishing Company, 1999.

VILLANUEVA, C. H.; MAUTE, K. Density and level set-XFEM schemes for topology optimization of 3-D structures. **Computational Mechanics**, v. 54, p. 133–150, 2014.

WANG, S.; DE STURLER, E.; PAULINO, G. H. Large-scale topology optimization using preconditioned Krylov subspace methods with recycling. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 69, p. 2441–2468, 2007.

WANG, Y.; HE, J.; LUO, Z.; KANG, Z. An adaptive method for high-resolution topology design. **Acta Mechanica Sinica**, v. 29, p. 840–850, 2013.

- WANG, Y.; KANG, Z.; HE, Q. Adaptive topology optimization with independent error control for separated displacement and density fields. **Computers and Structures**, v. 135, p. 50–61, 2014.
- WANG, Y.; KANG, Z.; HE, Q. An Adaptive refinement approach for topology optimization based on separated density field description. **Computers and Structures**, v. 117, p. 10–22, 2013.
- WEI, P.; WANG, M. Y.; XING, X. A study on X-FEM in continuum structural optimization using a level set model. **Computer-Aided Design**, v. 42, p. 708–719, 2010.
- WIBERG, N. – E.; ABDULWAHAB, F. An efficient postprocessing technique for stress problems based on superconvergent derivatives and equilibrium. **Numerical Methods in Engineering**, p. 25–32, 1992.
- WIBERG, N. E.; ABDULWAHAB, F.; LI, X. D. Error estimation and adaptive procedures based on Superconvergent Patch Recovery (SPR) techniques. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 4, p. 203–242, 1997.
- WIBERG, N. – E.; ABDULWAHAB, F.; ZIUKAS, S. Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, p. 3417–3440, 1994.
- WIBERG, N. – E.; LI, X. D. A postprocessed error estimate and an adaptive procedure for the semidiscrete finite element method in dynamic analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, p. 3585–3603, 1994.
- WU, J.; ZHU, J. Z.; SZMELTER, J.; ZIENKIEWICZ, O. C. Error estimation and adaptivity in Navier-Stokes incompressible flows. **Computational Mechanics**, v. 6, p. 259–270, 1990.
- XIE, W.; YIN, X. Metric tensors for the interpolation error and its gradient in L^p norm. **Journal of Computational Physics**, v. 256, p. 543–562, 2014.
- ZHANG, Z.; NAGA, A. A new finite element gradient recovery method: superconvergence property. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 26, p. 1192–1213, 2005.
- ZHANG, W. S.; GUO, X.; WANG, M. Y.; WEI, P. Optimal topology optimization design of continuum structures with stress concentration alleviation via level set method. **International Journal for Numerical Method in Engineering**, v. 93, p. 942–959, 2013.
- ZHU, J. Z.; ZIENKIEWICZ, O. C. Adaptive techniques in the finite element method. **Communications in Applied Numerical Methods**, v. 4, p. 197–204, 1988.
- ZIENKIEWICZ, O. C. The background of error estimation and adaptivity in finite element computations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 207–213, 2006.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; BOOROMAND, B.; ZHU, J. Z. Recovery procedures in error estimation and adaptivity Part I: Adaptivity in linear problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 176, p. 111–125, 1999.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method – Volume 1: The Basis**. Oxford: 5. ed. Butterworth Heinemann, 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 337–357, 1987.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. Adaptivity and mesh generation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 32, p. 783–810, 1991.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 32, p. 1331–1364, 1992a.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 33, p. 1365–1382, 1992b.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 101, p. 207–224, 1992c.

ZIENKIEWICZ, O.C; ZHU, J.Z. Superconvergence and the superconvergent patch recovery. **Finite Element Anal. Des.**, v. 19, p. 11–23, 1995.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, p. 2839–2853, 1989.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z.; GONG, G. Effective and practical h-p-version adaptive analysis procedures for the Finite Element Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, p. 879–891, 1989.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z.; WU, J. Superconvergent patch recovery technique — some further tests. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 9, p. 251–258, 1993.